হাতে কলমে

গণিত

অরূপরতন ভট্টাচার্য

হাতে-কলমে গণিত

অরূপরতন ভট্টাচার্য

শৈব্যা গ্রন্থন বিভাগ
৮/১এ শ্যামাচরণ দে স্ট্রীট কলিকাতা-৭৩

Haté-Kalamé Ganit by Arupratan Bhattacherjee

প্রকাশক ঃ
শ্রীদুলাল বল
৮/১ এ, শ্যামাচরণ দে স্ট্রীট
কলিকাতা-৭৩

প্রচ্ছদ-শিল্পী ঃ অমিয় ভট্টাচার্য
অলঙ্করণ ঃ পঞ্চানন মালাকার

মুদ্রক ঃ
লীলা ঘোষ
তাপসী প্রিণ্টার্স
৬ নং শিবু বিশ্বাস লেন,
কলিকাতা-৬

মূল্য ঃ বারো টাকা

ভূমিকা

গণিতকে হাতে-কলমের চৌহদ্দীর মধ্যে নিয়ে আসা সহজ কাজ নয়। যার সঙ্গে হিসেব-নিকেশ এবং গণনার সম্পর্ক তাকে কি ভাবে হাতে-কলমের জগতের মধ্যে নিয়ে আসা সম্ভব ?

কিন্তু গণিতের রাজ্যের সীমাহীন বিস্তৃতি। সে তার বৈচিত্র্যের সম্ভার নিয়ে অপটুর তুচ্ছ তাচ্ছিল্যকে অবজ্ঞা করে সাধারণ মানুষের জীবনযাত্রার সঙ্গে জড়িয়ে গেছে। তার অসামান্য প্রতিষ্ঠা এবং স্বাতন্ত্র্য তাকে হাতে-কলমের জগতের মধ্যেও টেনে নিয়ে এসেছে। সে অংশ যেমন চিত্তাকর্ষক, তেমনি তা ছোটদের কাছে উপভোগ্যও বটে। সেখানেও তাকে কিছুতেই উপেক্ষা করা যায় না। সেদিকে তাকিয়েই এই বইয়ের পরিকল্পনা।

বিদেশে এবং বিদেশী ভাষায় গণিতের প্রয়োগ নিয়ে যত পরীক্ষা-নিরীক্ষা হয়েছে এবং সে সম্পর্কে যতটুকু জানা যায়, বাংলা ভাষায় আজ পর্যন্ত তার অংশ মাত্রও তুলে ধরা হয়নি। অথচ ছোটরা যে তা সাগ্রহে গ্রহণ করবে, একথা নিঃসন্দেহে বলা যায়।

এটি রচনাকালে দু'জনের নানা পরামর্শের কথা বিশেষভাবে স্বীকার করতে হয়। একজন বন্ধুবর ডঃ অজয়কুমার চক্রবর্তী, অন্যজন স্নেহাস্পদ শ্রীঅনীশ দেব। প্রীতির সম্পর্ক যেখানে, সেখানে ঋণের হিসেব-নিকেশ চলে না, এই ভরসা।

অরূপরতন ভট্টাচার্য

আনন্দমোহন কলেজ
কলিকাতা-৭০০০০৯
১০।১১।৮৭

সূচীপত্র

প্রথম অধ্যায়	ঃ	ত্রিভুজে বিভিন্ন কোণ আঁকবে কেমন করে ?	1
দ্বিতীয় অধ্যায়	ঃ	বৃত্তে বিভিন্ন কোণ আঁকবে কেমন করে ?	15
তৃতীয় অধ্যায়	ঃ	একটা কোণকে তিন ভাগে ভাগ করবে কেমন করে ?	27
চতুর্থ অধ্যায়	ঃ	একটা বৃত্তের পরিধি মাপবে কি করে ?	31
পঞ্চম অধ্যায়	ঃ	বিভিন্ন তলক তৈরি করবে কি করে ?	39
ষষ্ঠ অধ্যায়	ঃ	বীজগাণিতিক সূত্র জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ করবে কেমন করে ?	45
সপ্তম অধ্যায়	ঃ	ত্রিভুজাকৃতি সংখ্যার বিন্যাস থেকে বিভিন্ন গুণফল বের করবে কি করে ?	54
অষ্টম অধ্যায়	ঃ	আঙ্গুলের সাহায্যে গুণ করবে কি করে ?	57
নবম অধ্যায়	ঃ	দশমিকের গুণ করার নতুন কৌশল	60
দশম অধ্যায়	ঃ	ভগ্নাংশের ভাগের অভিনব উপায়	63
একাদশ অধ্যায়	ঃ	সুষম ক্ষেত্রকে বিভিন্ন ক্ষেত্রে ভাগ করবে কেমন করে ?	67
দ্বাদশ অধ্যায়	ঃ	সমকোণী ত্রিভুজের সাহায্যে বিভিন্ন বর্গমূল বের করবে কিভাবে ?	71
ত্রয়োদশ অধ্যায়	ঃ	সংখ্যাকে কি রেখাচিত্রে দেখানো যায় ?	74
চতুর্দশ অধ্যায়	ঃ	কাগজের ফালির কটা পিঠ ?	77

আমাদের প্রকাশিত হাতে-কলমে বিজ্ঞান-এর অন্যান্য বই—

হাতে-কলমে পদার্থবিজ্ঞান
অজয় চক্রবর্তি

হাতে-কলমে রসায়ন
কমল চক্রবর্তি

হাতে-কলমে ইলেক্ট্রনিক্স
রত্নেশ্বর রায়

হাতে-কলমে জীবন বিজ্ঞান
সন্দীপ সেন

হাতে-কলমে কম্পিউটার
অনিশ দেব

১ ত্রিভুজে বিভিন্ন কোণ আঁকবে কেমন ক'রে ?

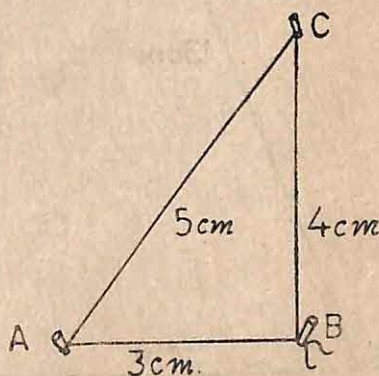
সমকোণ

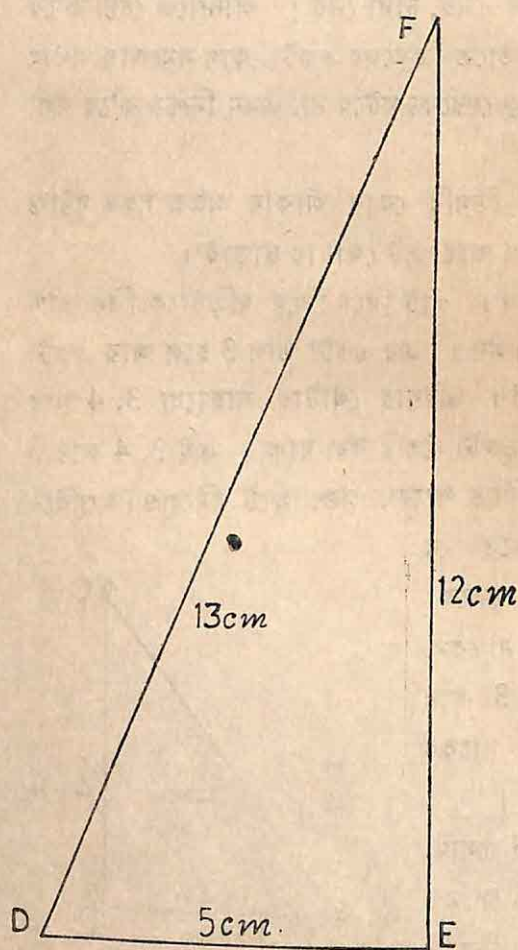
কাঁটা কম্পাস ছাড়া একটা সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করতে পারবে ?

পাশে সেট স্কোয়ার নেই, চাঁদা নেই ! আন্দাজে চেষ্টা ক'রে দেখো একবার। কিন্তু তাতে ত্রিভুজের একটা কোণ সমকোণ অর্থাৎ 90 ডিগরিই হবে, এতটুকু হেরফের ঘটবে না, এমন নিশ্চয় ক'রে বলা কঠিন।

প্রাচীন কালে 90 ডিগরি কোণ আঁকার অজস্র সহজ দৃষ্টান্ত পাওয়া যায় কাঁটা কম্পাস আর সেট স্কোয়ার ছাড়াই।

একটা লম্বা দড়ি নাও। গাঁট দিয়ে দিয়ে দড়িটাকে তিন ভাগ কর, যেমন তেমন ভাবে নয়। এর একটা ভাগ 3 হলে আর একটা ভাগ 4 আর শেষ ভাগ 5। এইবার খোঁটার সাহায্যে 3, 4 আর 5 বাহু স্থির রেখে ত্রিভুজটা তৈরি করা যাক। এই 3, 4 আর 5 এর দৈর্ঘ্য তুমি মিটারে নিতে পারো, গজ, ফুটে নিলেও অসুবিধে নেই বা তোমার ইচ্ছেমতো যে কোনো এককেই কাজ চলবে। আর একক যাই হোক না কেন, সব সময়ে দেখতে পাবে 3 আর 4 এই দু'টো বাহুর মাঝের কোণটা হবে 90 ডিগরি।

ধরা যাক AB = 3 সেমি, BC = 4 সেমি, CA = 5 সেমি। তাহলে ∠ABC = 90 ডিগরি হবেই। বিশ্বাস না হলে মেপে দেখো।

সমকোণ তৈরির জন্যে এ-রকম আরও বিভিন্ন ভাগের হিসেব আছে।

একটা ভাগ 5 ধ'রে আর একটা ভাগ 12 আর শেষ ভাগটা 13 নেওয়া যাক। দেখা যাবে, এবারেও যে ত্রিভুজটা তৈরি হল, সেটাও একটা সমকোণী ত্রিভুজ। এবারে কোন্ কোণটা সমকোণ হবে ?

5 আর 12 বাহু দু'টোকে নিয়ে যে কোণটা তৈরি হল, সেই কোণটাই এখন সমকোণ। যদি DE নিই 5 সেমি, EF = 12 সেমি এবং DF = 13 সেমি, তাহলে DEF ত্রিভুজে ∠DEF = 90 ডিগরি।

সমকোণের জন্যে এ-রকম হিসেব আরও আছে।

খাতায় কলমে আঁকার সময়ে সেন্টি-মিটার মাপ নিয়েই এগোনো যাক। 10 সেমি, 8 সেমি আর 6 সেমি দৈর্ঘ্যের তিনটি বাহু নিয়ে একটা ত্রিভুজ তৈরি করো। এই ত্রিভুজটা

কি রকম ত্রিভুজ হবে? এর কোনো কোণ কি সমকোণ? কাঠি ভেঙ্গে মাপ মত ত্রিভুজ তৈরি ক'রে মিলিয়ে নাও।

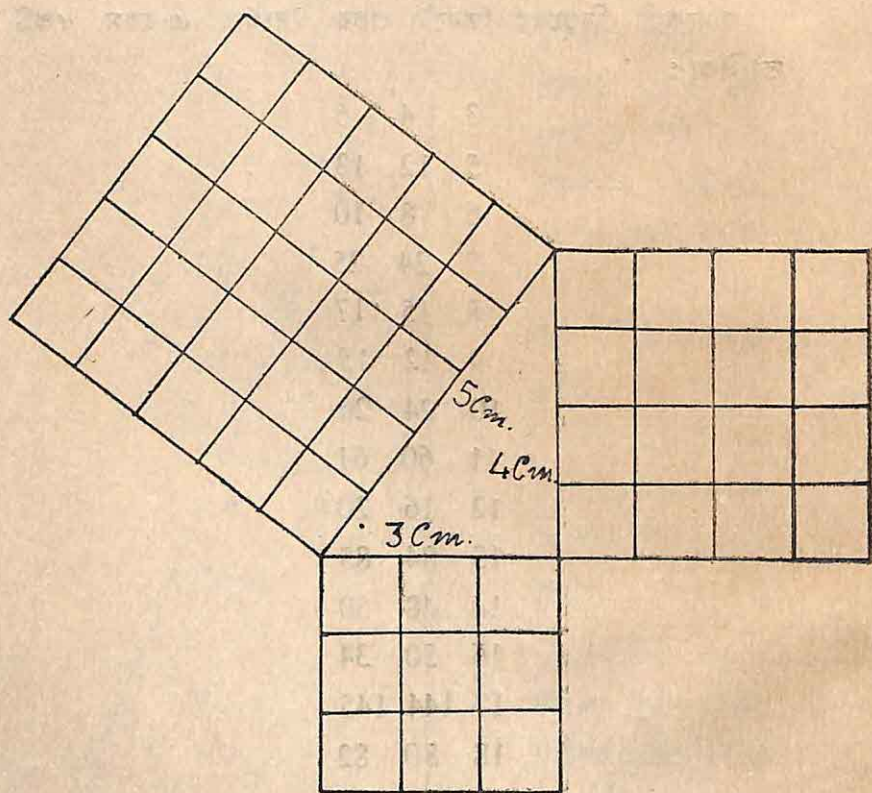
(3, 4, 5) বা (5, 12, 13) বাহুর দৈর্ঘ্যের ভাগের এই হিসেব নিয়ে যেমন একটা সমকোণী ত্রিভুজ তৈরি করা চলে, তেমনি (10, 8, 6) ভাগের এই হিসেবেও সমকোণী ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব। যে কোনো একক নিয়ে এগিয়ে যাও। ত্রিভুজের সমকোণটা ঠিকই দেখতে পাবে।

সমকোণী ত্রিভুজের তিনটে বাহুর দৈর্ঘ্যের এ-রকম একটি তালিকাঃ

3	4	5
5	12	13
6	8	10
7	24	25
8	15	17
9	12	15
10	24	26
11	60	61
12	16	20
13	84	85
14	48	50
16	30	34
17	144	145
18	80	82
20	48	52
22	120	122
24	32	40

সমকোণী ত্রিভুজের বেলায় দেখা যায়, সমকোণটা থাকে সবচেয়ে

বড় বাহুর বিপরীত দিকে। আর সমকোণী ত্রিভুজের সবচেয়ে বড় বাহুটাকে বলা হয় অতিভুজ।

এই সমকোণী ত্রিভুজ নিয়ে গ্রীক দার্শনিক ও গণিতবিদ্ পিথাগোরাসের নামে একটি আবিষ্কার চলে আসছে। কিন্তু পিথাগোরাসের জন্মের অনেক আগে ভারতীয় দার্শনিকেরা এই উপপাদ্যের প্রয়োগ জানতেন। প্রাচীন হিন্দুগ্রন্থ শুল্বসূত্রে এই আবিষ্কারটির প্রয়োগ আছে।

এতে দেখা যায়, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপরে যদি কোনো বর্গাকার ক্ষেত্র আঁকা যায়, তাহলে সেই ক্ষেত্রটি অন্য তু'টি বাহুর উপরে আঁকা বর্গাকার ক্ষেত্র তু'টির মিলিত ফলের সমান।

এবারে এমন একটি সমকোণী ত্রিভূজ নেওয়া যাক যার অতিভুজের দৈর্ঘ্য 5 সেমি। এখন a যদি কোনো বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু হয়, তাহলে বর্গাকার ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল হবে a^2। সেইজন্যে 5 সেমি দৈর্ঘ্যের উপরে আঁকা বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হবে 25 বর্গ সেমি। সমকোণী ত্রিভুজের উপরে অন্য হু'টি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সেমি আর 3 সেমি। 4 সেমি দৈর্ঘ্যের বাহুর উপরে অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 16 বর্গ সেমি আর অবশিষ্ট 3 সেমি দৈর্ঘ্যের বাহুর জন্যে বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হবে 9 বর্গ সেমি।

তাহলে পিথাগোরাস সমকোণী ত্রিভূজ ধরে যে আবিষ্কার করলেন, তাতে দেখা গেল—

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

বা 25 বর্গ সেমি = 16 বর্গ সেমি + 9 বর্গ সেমি

এখানে বাহুর দৈর্ঘ্য 3, 4 আর 5 একক লিখে ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুর অর্থাৎ অতিভুজের বিপরীত কোণটা সমকোণ হবে আর আবার যে কোনো সমকোণী ত্রিভুজ নিলেই পিথাগোরাসের আবিষ্কার খাটবেই।

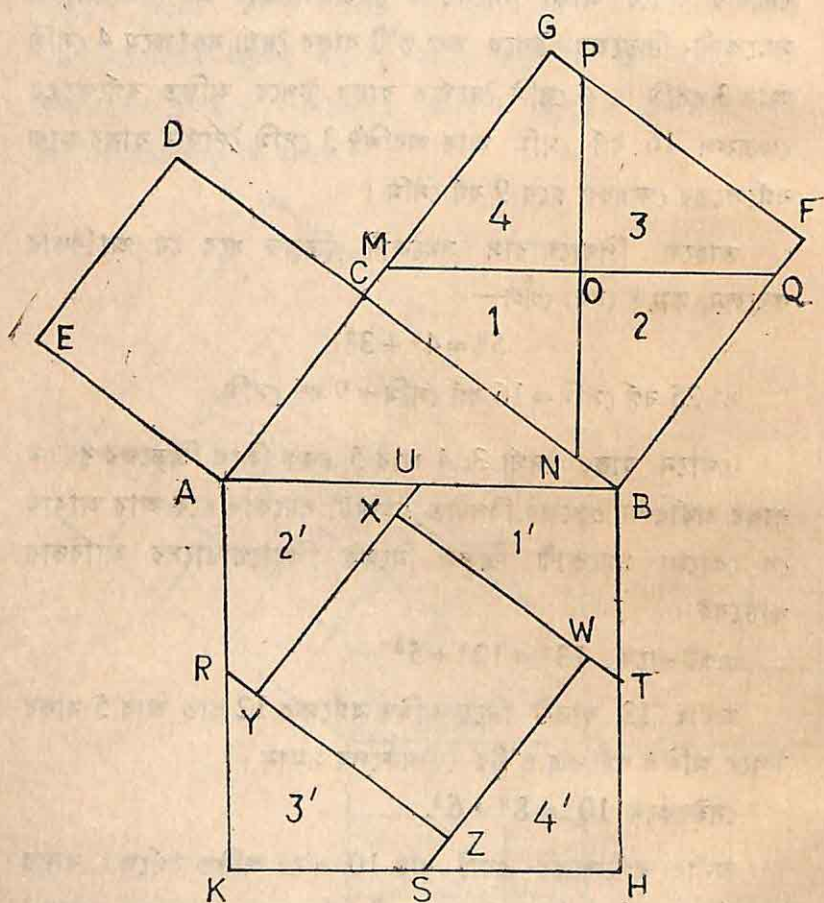
একইভাবে $13^2 = 12^2 + 5^2$

অর্থাৎ 13 বাহুটি নিয়ে অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র 12 বাহু আর 5 বাহুর উপরে অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র হু'টির যোগফলের সমান।

সেইরকমে $10^2 = 8^2 + 6^2$

অর্থাৎ বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু 10 ধ'রে অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, বাহুর দৈর্ঘ্য 8 আর বাহুর দৈর্ঘ্য 6 এমন হু'টি বর্গক্ষেত্রের যোগফলের সমান। আর আগের মত এ-সব ক্ষেত্রেও সবচেয়ে বড় বাহুটার বিপরীত কোণটা সমকোণ।

এখন সমকোণী ত্রিভুজ নিয়ে পিথাগোরাসের আবিষ্কার কাগজে কলমে তুমি সুন্দরভাবে মিলিয়ে নিতে পারো।

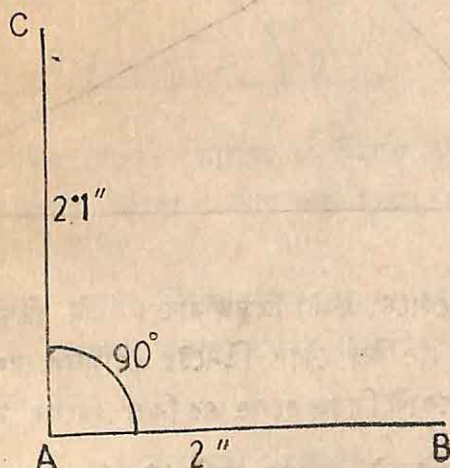
ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, ∠C সমকোণ। ত্রিভুজটির তিনটি বাহুর উপরে তিনটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করা হল। BFGC বর্গক্ষেত্রে O বিন্দুটি দু'টি কর্ণের ছেদবিন্দু। O বিন্দু দিয়ে AB-এর

সমান্তরাল MQ, আবার ওই O বিন্দুতে MQ-এর উপরে লম্ব PN টান। ফলে CBFG বর্গক্ষেত্রের ভেতরে চারটে চতুর্ভুজ 1, 2, 3, 4 পাওয়া গেল।

আবার AKHB বর্গক্ষেত্রে U, R, S, T যথাক্রমে AB, AK,

KH, HB-এর মধ্যবিন্দু। U, S থেকে AC-এর সমান্তরাল রেখা UXY ও SZW এবং R, T থেকে BC-এর সমান্তরাল RYZ ও TWX টান। এখন XYZW ক্ষেত্রটি উৎপন্ন হল। সেই সঙ্গে পাওয়া গেল আরও চারটি চতুর্ভুজ 1′, 2′, 3′, 4′। এরা 1, 2, 3, 4 চতুর্ভুজ চারটির অনুরূপ।

এখন মোটা কাগজ কেটে 1′, 2′, 3′, 4′-এর সঙ্গে যথাক্রমে 1, 2, 3, 4 মিলিয়ে নাও। 1′, 2′, 3′, 4′ চতুর্ভুজ চারটি মিলেই CBFG তৈরি হল। আর AKHB বর্গক্ষেত্রের বাকি অংশ XYZW বর্গক্ষেত্রের সমান আর একটা মোটা কাগজ কাটো। এটি ACDE বর্গক্ষেত্রের সমান হবে।

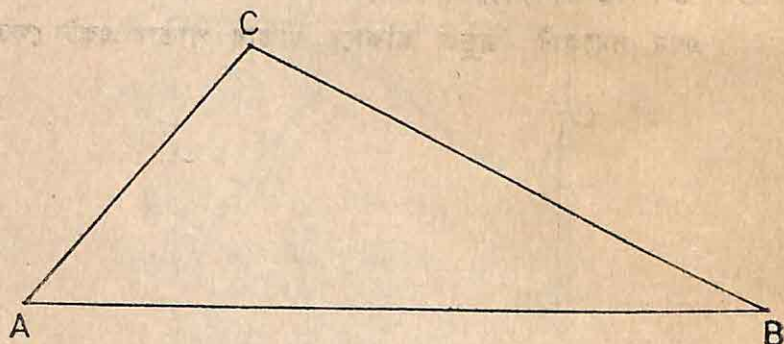
তাহলে ABC সমকোণী ত্রিভুজে ∠C সমকোণের বিপরীত বাহু AB-এর উপরে অঙ্কিত বর্গ AKHB = BC-এর উপরে অঙ্কিত বর্গ CBFG + AC-এর উপরে অঙ্কিত বর্গ ACDE-এর সমান।

এখন সমকোণী ত্রিভুজ আকারে খাতার পাতায় একটা ক্ষেত্র

তৈরি কর। সমকোণ সংলগ্ন বাহু দু'টির একটি 2 ইঞ্চি ও অন্যটি 2·1 ইঞ্চি হলে, তৃতীয় বাহুটি কত হবে, মেপে দেখো। [2·9 ইঞ্চি]

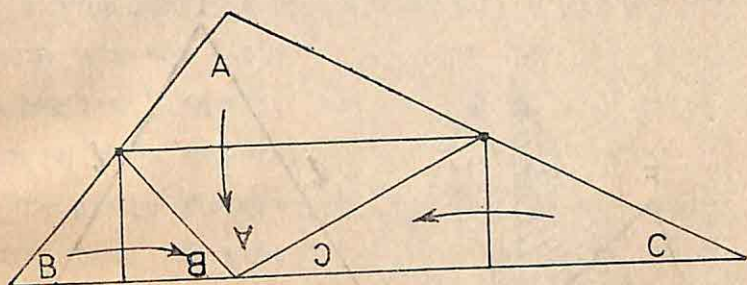
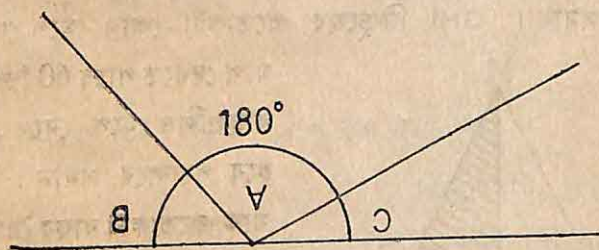
অন্যান্য কোণ

90 ডিগরি কোণ তৈরি হল। কিন্তু 60 ডিগরি, 30 ডিগরি, 45 ডিগরি, 15 ডিগরি কোণ তৈরি করবে কি ক'রে ?

দড়িতে একের পর এক গিঁট বেঁধে খোঁটায় সেই গিঁট লাগিয়ে টান টান ক'রে বসিয়ে ইচ্ছেমতো ত্রিভুজ তৈরি করা যায়। গিঁট যদি এমনভাবে দেওয়া হয় যে, তিনটে দৈর্ঘ্যই সমান থাকে, তাহলে যে ত্রিভুজটা তৈরি হবে, সেটা নিশ্চয়ই একটা সমবাহু ত্রিভুজ। দেশলাইয়ের তিনটে সমদৈর্ঘ্যের কাঠি নিয়েও একটা সমবাহু ত্রিভুজ তৈরি করা চলে। আর এই ত্রিভুজের তিনটে বাহু সমান হলে তিনটে কোণও সমান হবে।

ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি কত ?

ABC যে কোনো একটা ত্রিভুজ নাও। এই ত্রিভুজের তিনটে বাহু সমান নয়। কিন্তু কোণ তিনটের যোগফল দেখা যাবে 180 ডিগরি। সমকোণী ত্রিভুজ হলেও এর কিন্তু হেরফের নেই।

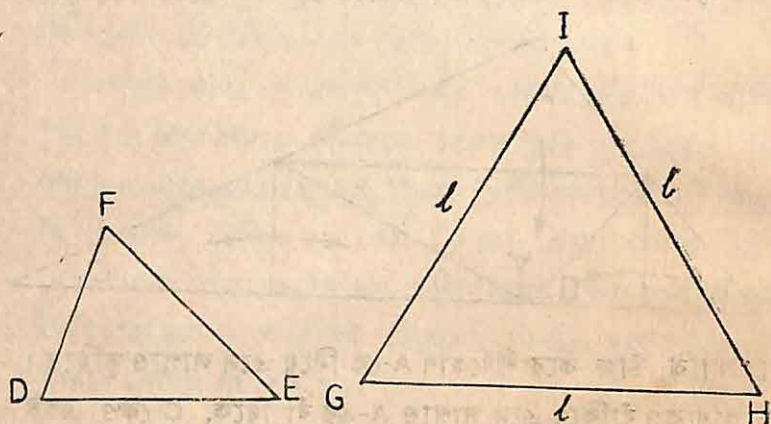
ত্রিভুজের তিনটে কোণের সমষ্টি 180 ডিগরি হয় কিনা আগে চাঁদা বা কম্পাস ছাড়া যে কোনো ত্রিভুজ নিয়েই হাতে কলমে মিলিয়ে দেখার চেষ্টা করো।

একটা কাগজের উপরে ABC-এর মত যে কোনো ত্রিভুজ এঁকে সেটা কেটে নাও। এখন ত্রিভুজটাকে উঁচু বা শীর্ষের দিক থেকে

মাঝামাঝি ভাঁজ করে শীর্ষকোণ A-কে নিয়ে এসে লাগাও ভূমিতে। B-কোণকেও বাঁকিয়ে এনে লাগাও A-এর বাঁ দিকে, C-কেও একই

ভাবে ডান দিক থেকে। তাহলে এই তিনটে কোণ মিলে একটা সরল কোণ তৈরি করলো। আর এই সরল কোণ তো 180 ডিগরি।

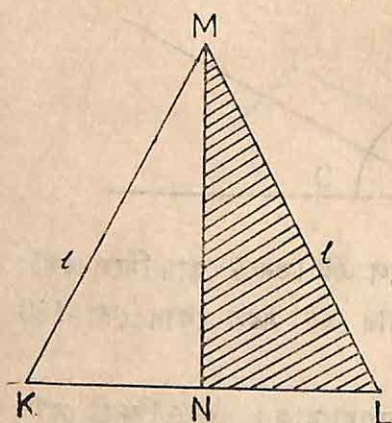
DEF আর একটা ত্রিভুজ নেওয়া যাক। এরও তিনটে কোণ মেপে দেখো। যোগফল আগের মতনই 180 ডিগরি, ত্রিভুজ যেমন ইচ্ছে হোক না কেন।

60 ডিগরি কোণ

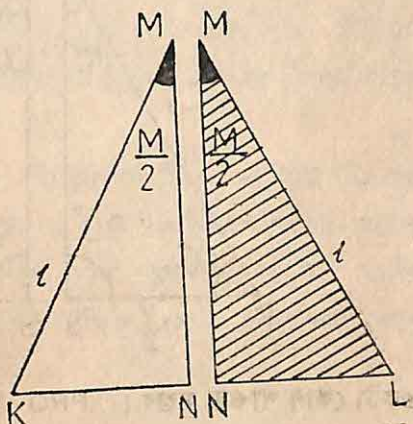
এখন ABC ত্রিভুজের যদি AB = BC = CA বা DEF ত্রিভুজের DE = EF = FD হয়, তাহলে তিনটে বাহুর মতনই তিনটে কোণও

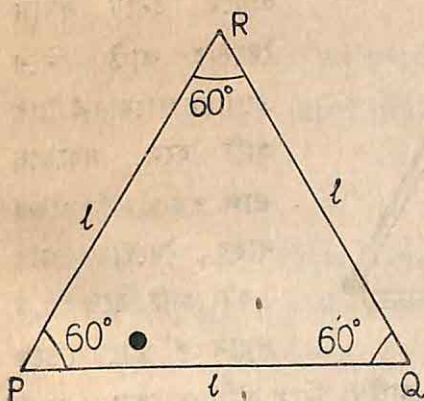
সমান হবে। তাহলে প্রত্যেকটা কোণের মান $\frac{180}{3}$ অর্থাৎ 60

ডিগরির সমান। GHI ত্রিভুজের প্রত্যেকটা কোণ মেপে দেখলে মাপ দেখতে পাবে 60 ডিগরি। বাহুগুলিও মেপে দেখো, তা হবে পরস্পরে সমান। ধরা যাক প্রত্যেকটা বাহুর দৈর্ঘ্য l।

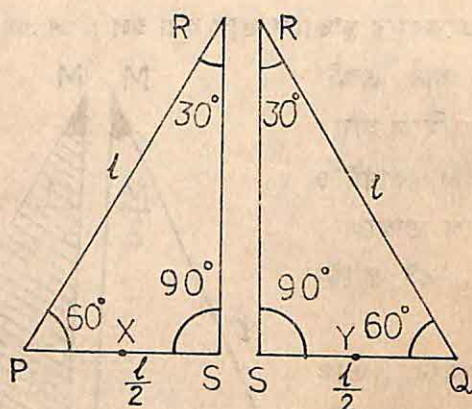
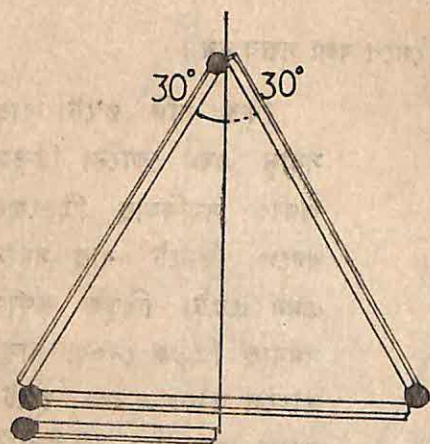
30 ডিগরি কোণ

এবারে 60 ডিগরি কোণ নির্ণয় করার পরে 30 ডিগরি কোণ নির্ণয় করার চেষ্টা করা যাক।

এমন একটা ত্রিভুজ নাও যার দু'টো বাহু সমান, মনে করো আগের মতন l-ই। ত্রিভুজটারও নাম দেওয়া যাক KLM। এই ত্রিভুজের MK বাহু ML বাহুর সঙ্গে সমান। এখন যদি KL এর উপর N এমন একটা বিন্দু নেওয়া যায়, যাতে KN = NL হয়, তাহলে এই ত্রিভুজ থেকে 30 ডিগরি কোণ বের করার একটা পথ মেলে।

কী ক'রে ?

MN যোগ কর। এ যোগ যেন যোগ নয়। MN-এর সাহায্যে ত্রিভুজটাকে একেবারে দু'ভাগে ভাগ করা হল। এ এমন ভাগ যাতে একটা ভাগ আর একটা ভাগের সঙ্গে মিলে যায়। ফল হল এই, M কোণটাও সমান দু'ভাগে ভাঙ্গলো। মেপে দেখো, এই দু'টো ভাগই সমান।

কিন্তু সমান ভাগ হলে কি হবে, প্রত্যেকটা ভাগের মান কত বলতে পারো কি ?

সত্যি কথা বলতে কি, না মেপে বলা সম্ভব নয়।

কিন্তু যদি দু'টো বাহু সমান এমন কোনো ত্রিভুজ অর্থাৎ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের বদলে তিনটে বাহু সমান এমন একটা ত্রিভুজ অর্থাৎ সমবাহু ত্রিভুজ নেওয়া যায়, তাহলে তাকে এ রকম দু'টো ভাগে ভাগ ক'রে 30 ডিগরি কোণের একটা হিসেব সহজে পাই। মূল ত্রিভুজের দু'টো কোণ যেমন ছিল তেমনি রয়ে গেল, সে দু'টোর প্রত্যেকটার পরিমাপ 60 ডিগরি। আর দ্বিখণ্ডিত কোণ প্রত্যেকটা পরিমাপে 30 ডিগরি। এইভাবে সমবাহু ত্রিভুজের তিনটে

বাহুর যে কোনোটির মধ্যবিন্দু বের ক'রে বিপরীত কৌণিক বিন্দুর সঙ্গে যোগ করলে সেই কোণটিকে দ্বিখণ্ডিত করা যায়। তখন 30 ডিগরির

একটা কোণ পাওয়া সম্ভব। PRQ ত্রিভুজে প্রত্যেকটা কোণ 60 ডিগরি। কিন্তু ∠PRS বা ∠QRS প্রত্যেকটা 30 ডিগরি।

30 ডিগরির একটা হিসেব বের করার জন্যে প্রথমে তিনটে সমান দৈর্ঘ্যের কাঠি নিয়ে এগোতে পারো। ঝাঁটার কাঠি হলে সবচেয়ে ভাল হয়। ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্যের আর একটা কাঠি নিয়ে তাকে সমান দু' ভাগে ভেঙ্গে নাও ভাঁজ ক'রে। এই অর্ধেক কাঠিটা নিয়ে তুমি যে কোনো বাহুর কৌণিক বিন্দু থেকে সেই বাহুর দৈর্ঘ্য বরাবর বসাও। অর্ধেক কাঠিটার অন্য প্রান্ত হচ্ছে সমস্ত কাঠিটার মধ্যবিন্দু। আর যেই এই মধ্যবিন্দু পাওয়া গেল অমনি বলতে গেলে কাজ সম্পূর্ণ। একটা

লম্বা কাঠি নিয়ে বিপরীত শীর্ষ এবং এই মধ্যবিন্দুর ভেতর দিয়ে সেটিকে নিয়ে গেলে শীর্ষে যে কোণটা মেলে, তারই মাপ 30 ডিগরি।

15 ডিগরি কোণ

যাই হোক, এই যে 30 ডিগরি কোণ পাওয়া গেল, এ থেকে আগের মতই কি আমরা এর অর্ধেক 15 ডিগরি কোণের হিসেব পেতে পারি ?

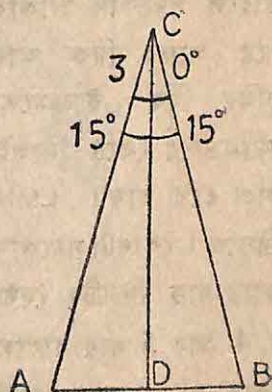
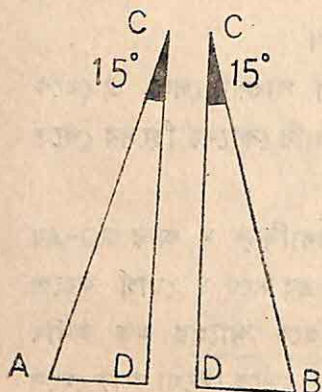
PRS বা RSQ ত্রিভুজের PS-এর মধ্যবিন্দু X আর SQ-এর মধ্যবিন্দু Y। এবার R-এর সঙ্গে X ও R-এর সঙ্গে Y যোগ করলে R কোণটি কি তু'টি সমান ভাগে ভাগ হবে আগের মত অর্থাৎ প্রত্যেকটা অংশ হয়ে যাবে 15 ডিগরি ? ভেবে দেখো আর মেপে বলো।

কি লক্ষ্য করলে ?

না, PRS আর SRQ কোণটি যে তু'টি অংশে ভাগ হল তারা সমান নয়। একটাকে আর একটার মুখোমুখি ফেললে তারা মিলবে না। ফলে ∠PRS বা ∠SRQ কোণটি তু'ভাগ হয়ে 15 ডিগরির সমান হবে না।

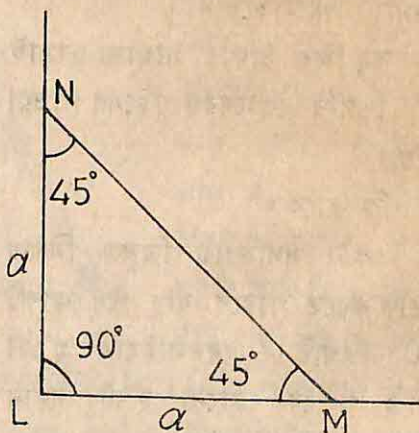
তবু কিন্তু চাঁদার সাহায্য ছাড়াই 15 ডিগরি কোণেরও হিসেব পাওয়া যায়।

কি ভাবে ?

একটা সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ নিশ্চয় তৈরি করতে পারবে যার শীর্ষ কোণটি 30 ডিগরি। দেশলাইয়ের তু'টো কাঠি বা যে কোনো তু'টো সমান কাঠি নিয়েও ত্রিভুজটা তৈরি করতে পারো। এখানে C 30 ডিগরি, AC = BC আর D, AB-এর মধ্যবিন্দু। C আর D যোগ ক'রে এখন যে CD সরলরেখাটি পাবে,

তা ABC ত্রিভুজকে সমান ছু'টো ভাগে ভাগ করবে। এখানে ∠ACB যে ছু'টো অংশে ভাগ হল তার প্রত্যেকটা অংশই সমান আর তা নিশ্চয়ই 15 ডিগরি।

90 ডিগরি, 60 ডিগরি, 30 বা 15 ডিগরির পরে বাকি রইল 45 ডিগরি কোণ বের করা। এর পরিমাপও করা যায় সহজে।

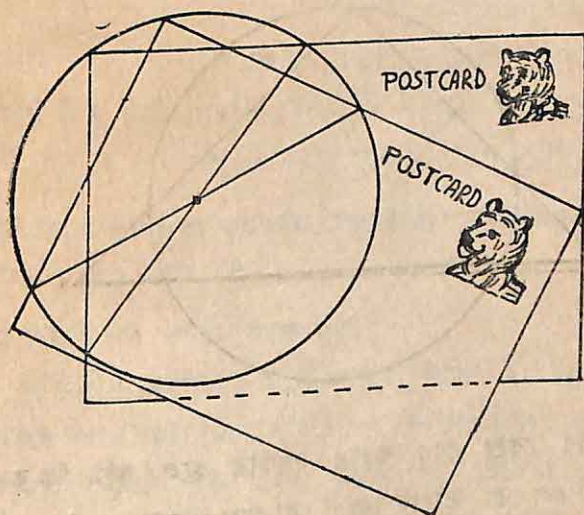
45 ডিগরি কোণ

এবার এমন একটা ত্রিভুজ নাও যার একটা কোণ 90 ডিগরি। 3, 4 আর 5 একক দৈর্ঘ্যের বাহু নিলে আগের মত ত্রিভুজটা সাজাতে কোনো অস্থবিধে হয় না। 3 আর 4 বাহুর মাঝের কোণটা হবে 90 ডিগরি। কিন্তু সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ ছাড়া বাকি ছু'টো কোণের একটাকেই বা 45 ডিগরি মাপে আনা যায় কেমন ক'রে?

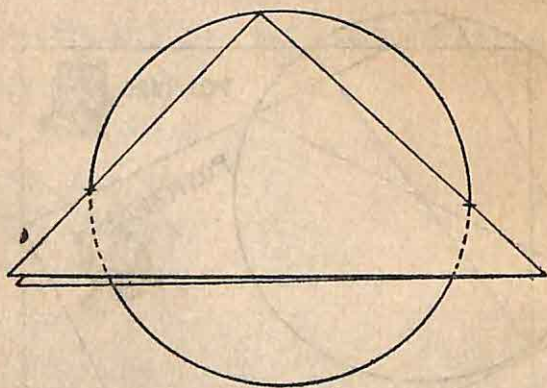
ত্রিভুজের যদি ছু'টো কোণ সমান হয় তাহলে কোণের সঙ্গে যুক্ত ছু'টো বাহুও সমান হবে। তাহলে সমকোণ আঁকার পরে লম্বের দিক আর ভূমির দিক ইচ্ছেমতো সমানভাবে কেটে নিলেই কাজ হয়ে যায়। LMN ত্রিভুজে L কোণটা সমকোণ। এবার বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য 3, 4 আর 5 ধরে রাখলে চলবে না। তার বদলে LM = LN কেটে নাও। এখন ∠LMN আর ∠LNM প্রত্যেকটা কোণের মান 45 ডিগরি।

২ বৃত্তে বিভিন্ন কোণ আঁকবে কেমন ক'রে ?

ত্রিভুজের মধ্যে কোণের হিসেবের মত বৃত্তের মধ্যেও কোণের হিসেব করা চলে সহজে। কিন্তু একটা বৃত্ত দেওয়া থাকলে আগে তার কেন্দ্রটা বের করা দরকার।

বৃত্তের কেন্দ্র বের করবে কিভাবে ?

হয়তো ভাবছো, কাঁটা কম্পাস ছাড়া নিখুঁতভাবে তো বৃত্তের কেন্দ্র বের করা যাবেই না। কিন্তু না, তা নয়, কাঁটা কম্পাস কাজে না লাগিয়েই বৃত্তের কেন্দ্র বের করা যায় খুব সহজেই। যে কোনো একটা চৌকো কাগজ নাও। খাতার পাতা ছেঁড়ার দরকার নেই। হাতের কাছে একটা পোস্টকার্ড থাকলে সেটাকেই কাজে লাগাতে পারো।

পোস্টকার্ডের যে কোনো একটা কোণ ধর বৃত্তের পরিধির উপরে। কোণটাকে নিয়ে পোস্টকার্ডের যে হু'টো বাহু আছে, লক্ষ্য কর,

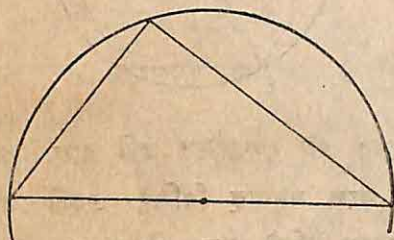
সেই হু'টো বাহু বৃত্তের পরিধিকে হু' জায়গায় ছেদ করেছে। পরিধির গায়ে এই হু'টো বিন্দুতে দাগ দিয়ে রাখো। এদের ভেতর দিয়ে একটা সরলরেখা টানো। এটা বৃত্তের একটা ব্যাস। অর্থাৎ গেছে বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে। আবার পোস্টকার্ডটাকে ঘুরিয়ে কৌণিক বিন্দুটাকে পরিধির উপরে আর একটা জায়গায় ধরো। পোস্টকার্ডের আগের বাহু হু'টো পরিধির উপরে এবার আরও হু'টো নতুন বিন্দুতে ছেদ করবে। ওই হু'টো বিন্দুর ভেতর দিয়ে টানা সরলরেখা ওই বৃত্তেরই আর একটা নতুন ব্যাস। অর্থাৎ এটাও গেছে বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে। এই হু'টি ব্যাসের ছেদবিন্দুটিই বৃত্তের কেন্দ্র।

বৃত্তের কেন্দ্র বের করবার সময়ে অবশ্য পোস্টকার্ড না নিলেও কাজ চলে। ধরো খাতার পাতার এক কোণে তুমি একটা কৌটোর গোল ঢাকনি বসিয়ে একটা বৃত্ত আঁকলে। কম্পাস দিয়ে এ বৃত্ত আঁকা নয়। অর্থাৎ এ বৃত্তের কেন্দ্র তুমি দেখতে পাবে না।

এই বৃত্তের কেন্দ্র বের করার দরকার হলে তুমি কি করবে? পোস্টকার্ড হল তো ভালই হল। না হলে খাতার একটা কৌণিক বিন্দুকে পাতা মুড়ে নিয়ে এসে পরিধির উপরে রেখে আগের মত বৃত্তের কেন্দ্র ঠিক ক'রে নাও।

এই রকম কোনো বৃত্ত থেকে তোমরা 90 ডিগরি, 60 ডিগরি, 30 ডিগরি, 45 ডিগরি বা এ-রকম আরো কোণের পরিমাপ করতে পারো।

সমকোণ

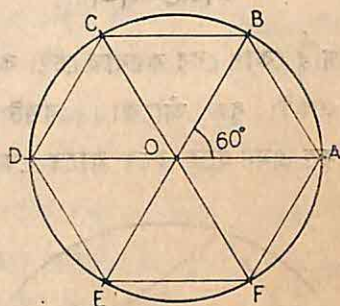
প্রথমে 90 ডিগরি কোণ বের করবার চেষ্টা করো।

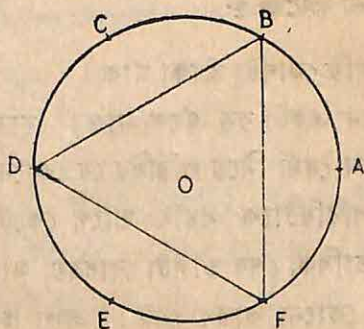
কেন্দ্র সমেত একটা বৃত্ত আঁকো। বৃত্তটা সম্পূর্ণ না হলেও চলবে। কিন্তু সে বৃত্ত এমন হতে হবে যাতে কেন্দ্রের ভেতর দিয়ে

ব্যাস আঁকবার সময়ে তা পরিধিকে দু'টো বিন্দুতে ছেদ করে। এই ব্যাসের প্রান্ত বিন্দু দু'টি পরিধির উপরে যে কোনো জায়গায় যে কোণ তৈরি করে, তা 90 ডিগরির সমান হবে। মেপে দেখো।

60 ডিগরি কোণ ও বৃত্তের ভেতরে সুষম ষড়ভুজ আঁকবে কেমন করে?

প্রথমে 60 ডিগরি কোণটা আঁকা যাক।

আগে যে কোনো একটা বৃত্ত এঁকে নাও। বৃত্তের যা ব্যাসার্ধ, সেই ব্যাসার্ধের সমান দৈর্ঘ্য নিয়ে পরিধির যে কোনো জায়গা থেকে শুরু করে বৃত্তের পরিধিটাকে সমান ভাগে কেটে কেটে এগোও। মনে ভয় হওয়া স্বাভাবিক, শেষ ভাগটা বোধহয় আর মিলবে না। কিন্তু না, আশঙ্কার কোনো কারণ নেই। লক্ষ্য করবে, শেষ ভাগ এসে মিলে যাবে, প্রথম ভাগ যেখানে শুরু হয়েছিল ঠিক সেইখানে।

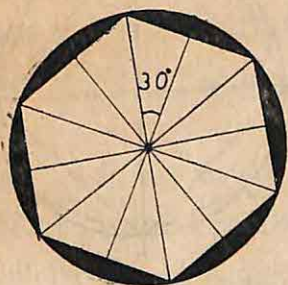
আর বৃত্তের কেন্দ্র তো তোমার জানা। প্রত্যেকটা ভাগের প্রান্ত দুটো যোগ ক'রে যাও কেন্দ্রের সঙ্গে। আর এক একটা ভাগ কেন্দ্রে যে কোণ তৈরি করলো তা মেপে দেখো। দেখতে পাবে, প্রত্যেকটা কোণই সমান এবং তা হল 60 ডিগরি।

বৃত্তের ভেতরের এই ক্ষেত্রটিতে ছটি বাহু, প্রত্যেকটি বাহুই সমান। এটিকে বলে সমবাহু বিশিষ্ট একটি ষড়ভুজ। বৃত্তের সাহায্য নিয়ে সমবাহু বিশিষ্ট ষড়ভুজ আঁকা যায় সহজে। ব্যাসার্ধ ছোট বড় হলেও এর কোনো তফাৎ হবে না। বৃত্তের ভেতরে আছে বলে এ রকম ষড়ভুজকে বলে অন্তর্লিখিত ষড়ভুজ।

120 ডিগরি কোণ

ষড়ভুজের ছ'টা বিন্দুর বদলে যদি এখানে একটা বিন্দু ছেড়ে

একটা বিন্দু নাও, তাহলে কি হবে? তখন একটা ত্রিভুজ পাবে BDF। এই ত্রিভুজটা সমবাহু ত্রিভুজ অর্থাৎ প্রত্যেকটা কোণ 60 ডিগরি। তাহলে ∠DOF কোণের পরিমাণ কত বলতে পারো?

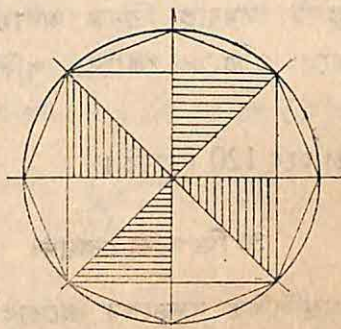
মেপে দেখো, তা হবে 120 ডিগরি।

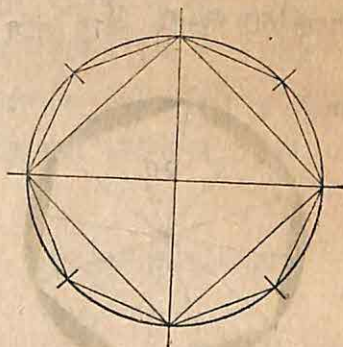
30 ডিগরি কোণ

আবার এই অন্তর্লিখিত ষড়ভুজের প্রত্যেকটা বাহুকে সমান দু'ভাগে ভাগ করলে ছটা ত্রিভুজ থেকে বারোটা ত্রিভুজ পেয়ে যাবে। এই প্রত্যেকটা ত্রিভুজ সমকোণী। এখন প্রত্যেকটা ত্রিভুজ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ তৈরি করছে তা কখনোই 60 ডিগরি হতে পারে না। মেপে দেখলে বুঝবে, তা হবে 30 ডিগরি। তাহলে কোনো বৃত্তের ভেতরে ছটা সমান বাহু নিয়ে একটা ষড়ভুজ আঁকলে তা থেকে বৃত্তের কেন্দ্রে 60 ডিগরি কোণ এসে যায় সোজাসুজি।

আর ছটা বাহুকে সমান দু'ভাগ করলে তা থেকে 30 ডিগরি কোণও চলে আসবে।

45 ডিগরি কোণ

কিন্তু এইভাবে কি বৃত্তের কেন্দ্রে 45 ডিগরি কোণের হিসেব পাওয়া যাবে?

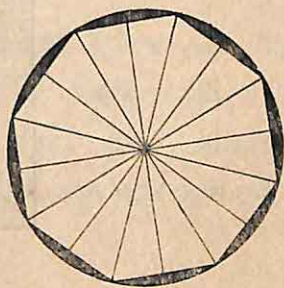
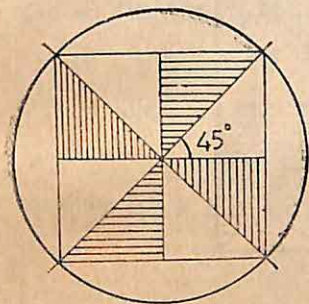
এখানে বৃত্তের ভেতরে আটটি সমকোণী ত্রিভুজ দেখতে পাচ্ছো।

প্রত্যেকটা ত্রিভুজেই অতিভুজ বৃত্তের ব্যাসার্ধ। কিন্তু এইরকম ভাবে আটটা ত্রিভুজ আঁকবে কী করে?

আঁকবার সময়ে প্রথমে একটা আর একটার সঙ্গে লম্বভাবে আছে এমন দুটো ব্যাস টানো। এর চারটে প্রান্ত যোগ করলে যে

ক্ষেত্রটা পাওয়া যায়, সেটা একটা বর্গক্ষেত্র। এইবার যে চাপগুলো হল, সেগুলোকে দ্বিখণ্ডিত ক'রে যোগ করলেই পাওয়া যাবে একটা সুষম অষ্টভুজ।

এখন বিভিন্ন সমকোণী ত্রিভুজ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ তৈরি করলো, তার পরিমাণ কত?

মেপে দেখো, দেখতে পাবে, এই কোণ হবে 45 ডিগরি।

$22\frac{1}{2}$ ডিগরি কোণ

এই অষ্টভুজের ভেতরে ব্যাসার্ধকে অতিভুজ ধরে যদি ষোলটি

সমকোণী ত্রিভুজ নিতে, তাহলে দেখতে পেতে, তার প্রত্যেকটিই কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তার পরিমাপ $22\frac{1}{2}$ ডিগরি।

পেলাম কি ভাবে? বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ তার পরিমাপ 360 ডিগরি।

বর্গক্ষেত্রের বেলায় চার বাহু কিন্তু সমকোণী সুষম ত্রিভুজ আটটি। প্রত্যেকটি ত্রিভুজ কেন্দ্রে যে কোণ তৈরি করে, তা হল

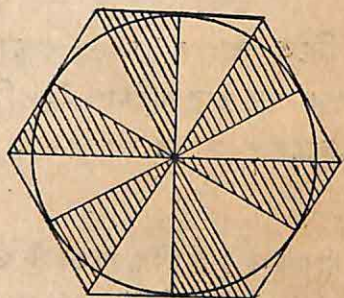
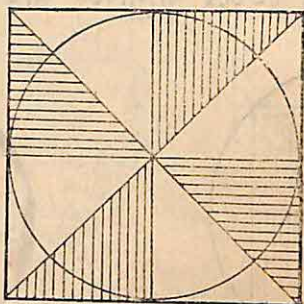
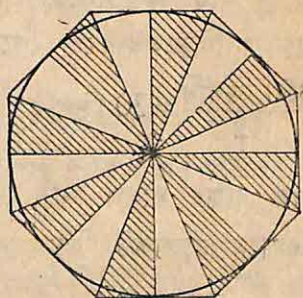
$$\frac{360 \text{ ডিগরি}}{8} = 45 \text{ ডিগরি।}$$

ষড়ভুজের বেলায় ছয় বাহু কিন্তু সমকোণী সুষম ত্রিভুজের সংখ্যা বারো। তাহলে প্রত্যেক ত্রিভুজের জন্যে কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ হবে

$$\frac{360 \text{ ডিগরি}}{12} = 30 \text{ ডিগরি।}$$

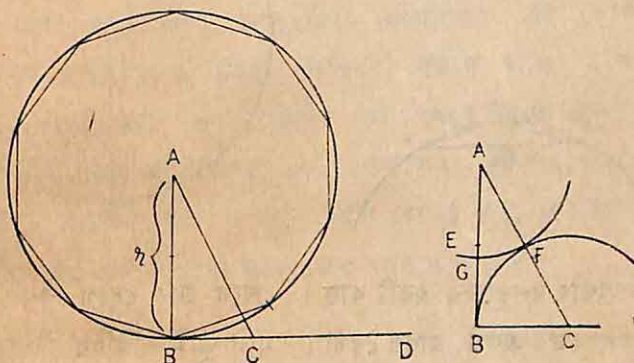
অষ্টভুজের বেলায় বাহুর সংখ্যা আট কিন্তু সমকোণী সুষম ত্রিভুজ ষোলটি। এখানে প্রত্যেকটি ত্রিভুজ কেন্দ্রে যে কোণ তৈরি করছে, তা হল

$$\frac{360 \text{ ডিগরি}}{16} = 22\frac{1}{2} \text{ ডিগরি।}$$

এখানে একটা কথা মনে রেখো, বৃত্তের ভেতরের বহুভুজের

বদলে বৃত্তকে বাইরে থেকে ঘিরে রেখেছে এমন বহুভুজ নিয়েও কোণের হিসেব করা যায়।

অবশ্য ষড়ভুজ যে কৌশল ক'রে আঁকা যায়, তার কোনো তুলনাই হয় না।

36 ডিগরি কোণ ও বৃত্তের ভেতরে সুষম দশভুজ আঁকবে কেমন ক'রে ?

তবে ষড়ভুজের মত বৃত্তের ভেতরে সুষম দশভুজ আঁকতেও কোনো অসুবিধে হয় না।

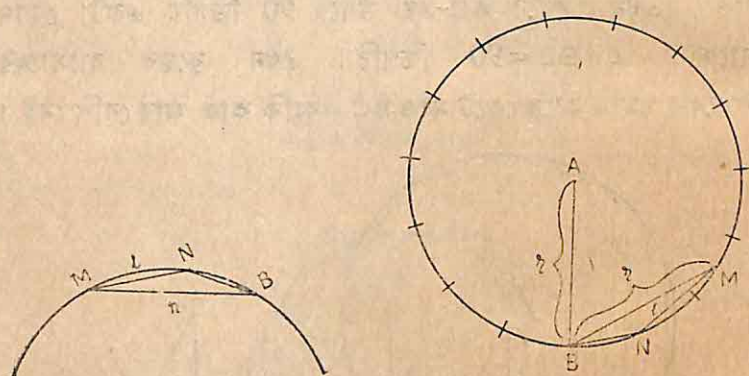
যে কোনো একটি বৃত্ত এঁকে বৃত্তের একটি ব্যাসার্ধ AB টেনে নাও। এখন B থেকে AB-এর উপরে 90 ডিগরি একটা কোণ আঁকো। ∠ABD = 90 ডিগরি। এখন বৃত্তের ব্যাসার্ধের অর্ধেকের সমান ক'রে কেটে নাও BC। বাকি কাজ আর বেশি নেই।

C-কে কেন্দ্র করে CB ব্যাসার্ধ নিয়ে চাপ টানো। সেই চাপ CA-কে F-এ ছেদ করে। আবার AF = AG কাটো। এখন AG আর GB-এর মধ্যে যে অংশটি বড়, তার সমান চাপ নিয়ে বৃত্তের পরিধিকে একের পর এক কাটতে থাকলে দেখবে, তা ঠিক সমান দশভাগে ভাগ হয়ে গিয়েছে। আর এই দশভাগ থেকে বৃত্তের ভেতরে সহজেই আঁকা যায় দশভুজ।

মেপে দেখো তো, প্রত্যেকটা ভাগ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ তৈরি করে তার পরিমাপ কত ?

হিসেব করলে দেখতে পাবে, তা হবে 36 ডিগরি।

24 ডিগরি কোণ ও বৃত্তের ভেতরে সুষম পঞ্চদশভুজ আঁকবে কেমন ক'রে ?

সুষম দশভুজ আঁকার সঙ্গে সঙ্গে সুষম পঞ্চদশভুজও আঁকা যায়।

দশভুজ আঁকার সময়ে যে ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত এঁকেছিলে এখানে সেই একই ব্যাসার্ধ নিয়েই এগিয়ে যাও। ওই ব্যাসার্ধের প্রথমে একটি বৃত্ত আঁকো। তারপর ওই ব্যাসার্ধের সমান একটি চাপ নাও BM। এবার M থেকে পরিধির উপরে MN কেটে নাও। MN=

AG অর্থাৎ দশভুজের একটি বাহু। শেষে BN যোগ কর। BN পঞ্চদশভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য। যদি তুমি পরিধির উপরে BN সমান চাপের দৈর্ঘ্য কাটতে থাকো তাহলে 15টি চাপ শেষ হওয়ার সময়ে আবার তুমি শুরুর জায়গাতে ফিরে আসবে। এই সুষম পঞ্চদশভুজের প্রত্যেকটা বাহু বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ করছে, তা নিশ্চয়ই বুঝতে পারছো। এখানে প্রত্যেকটা কোণ হবে 24 ডিগরি।

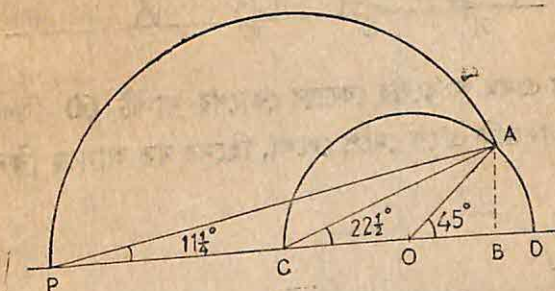
72 ডিগরি কোণ ও বৃত্তের ভেতরে সুষম পঞ্চভুজ আঁকবে কেমন ক'রে?

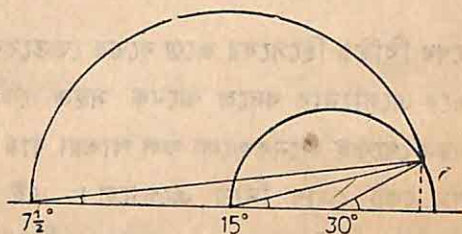
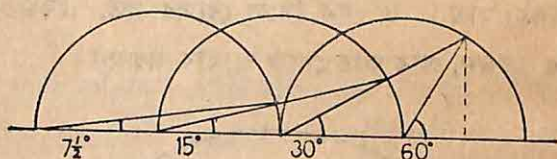
বৃত্তের অন্তর্লিখিত সুষম দশভুজ থেকে একটা সুষম পঞ্চভুজ তৈরি করা কিন্তু কঠিন নয়। পরিধির উপরে দশটা বিন্দুর সব কটা না নিয়ে একটা ছেড়ে একটা নাও। যোগ করলেই পেয়ে যাবে একটা সুষম পঞ্চভুজ।

দশভুজের প্রত্যেকটা বাহু বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ করে তার পরিমাণ 36 ডিগরি, আর পঞ্চভুজ ? এর প্রত্যেকটা বাহুতে কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের পরিমাণ 72 ডিগরি।

অর্ধবৃত্তে অর্ধকোণ

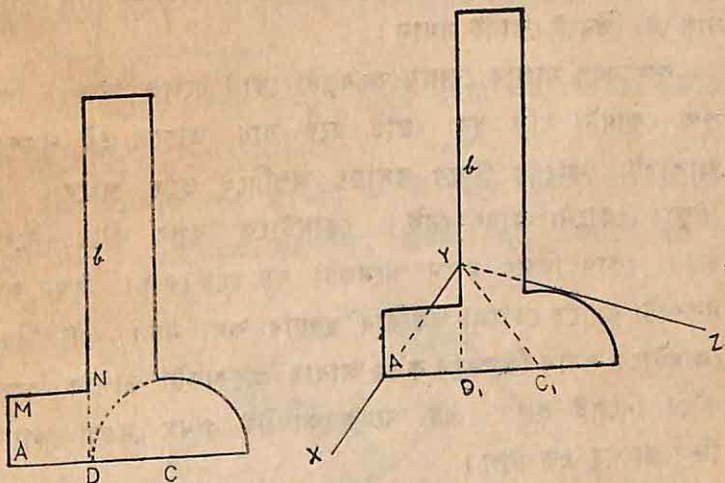
তবে কোণের বিভিন্ন হিসেবের জন্যে বৃত্তের ভেতরের বা বাইরের বিভিন্ন ক্ষেত্র ধরে এগোনোর বদলে অনেক সহজ কৌশল আছে। এতে একটা অঙ্কন থেকেই অনেকগুলো ফল পাওয়া যায়।

ধরো, প্রথম একটা কোণ নিয়ে এগোলে। এই কোণ থেকে পাওয়া যাবে আর একটা কোণ। সেজন্যে আঁকা দরকার শুধু একটা অর্ধবৃত্তের। এবার দ্বিতীয় কোণ থেকে আরও একটা—তার জন্যে আঁকতে হবে আর একটা অর্ধবৃত্ত। এইভাবে ধাপে ধাপে এগিয়ে যাওয়া যায়। এ যেন রিলে রেসের মত, একজনের কাছ থেকে আর একজন, তার কাছ থেকে আবার অন্যজন।

সম্পূর্ণ বৃত্তের বদলে প্রথমে একটা অর্ধবৃত্ত নাও। এর কেন্দ্রে এমন একটা ব্যাসার্ধ নিতে হবে যা ভূমির সঙ্গে 45 ডিগরি কোণ তৈরি করে। তাহলে ভূমির অন্য প্রান্তে যে কোণ পাওয়া যাবে, তার পরিমাণ $22\frac{1}{2}$ ডিগরি। মেপে দেখলেই বুঝতে পারবে। অর্থাৎ $\angle AOB = 45$ ডিগরি, $\angle ACB = 22\frac{1}{2}$ ডিগরি। রিলে রেসে এখানে থামলে চলবে না। এবার CA-কে ব্যাসার্ধ ধরে আর

একটা অর্ধবৃত্ত প্রায় সম্পূর্ণ কর। এখন ∠APC কোণটা মেপে দেখো। এটা হবে $22\frac{1}{2}$-এর অর্ধেক অর্থাৎ $11\frac{1}{4}$ ডিগরি। PA-কে ব্যাস ধরে ইচ্ছে করলে আরও এগোতে পারো। ব্যাসের প্রান্তে এবারে যে কোণটা পাবে তা হবে $5\frac{5}{8}$ ডিগরি।

যদি অর্ধবৃত্ত এঁকে প্রথম কোণটি নিতে 30 ডিগরি, তাহলে পর পর কোণগুলি আসতো 15 ডিগরি, $7\frac{1}{2}$ ডিগরি, $3\frac{3}{4}$ ডিগরি।

এখন প্রথম অর্ধবৃত্তের কেন্দ্রের কোণের মাপটি 60 ডিগরি ধরে পরের কোণগুলি এঁকে মেপে দেখো, হিসেব মত আসছে কিনা।

৩ একটা কোণকে তিন ভাগে ভাগ করবে কেমন ক'রে?

জ্যামিতিতে একটা কোণকে তিনভাগে ভাগ করার জন্যে একটা নকশা তৈরি করা যায়। সেই নকশা কাজে লাগিয়ে যে কোনো পরিমাপের কোণকে সমান তিনভাগে ভাগ ক'রে একটা কোণ থেকে অন্য অনেক কোণ বের করা সম্ভব এক এক ক'রে, যেমন 90 ডিগরি থেকে 30 আর 60 ডিগরি, 120 থেকে 40 আর 80 ডিগরি।

সহজে না দুমড়ে মুচড়ে যায়, পিজবোর্ডের মত মোটা কাগজ থেকে একটা ছোট আকারের নতুন ধরণের নকশা কেটে নাও। এর সাহায্যে যে কোনো কোণকে তিন ভাগে ভাগ করা সম্ভব খুব

সহজে। নকশাটা একটা উলটোনো T-এর মত, শুধু T-এর একটা বাহুতে একটা বৃত্তাংশ। এই বৃত্তাংশের কেন্দ্র C-বিন্দু।

ধর XYZ কোণটিকে তুমি সমান তিনটি অংশে ভাগ করবে। পিজবোর্ডের নকশাটি হাতে নিয়ে কোণটার ওপরে এমনভাবে বসাও

যাতে T-এর A-বিন্দু কোণের একদিকে থাকে আর b বাহু যায় Y বিন্দুর ভেতর দিয়ে। শুধু এটুকু মিললেই চলবে না। এই সঙ্গে বৃত্তাংশটিকে YZ বাহু স্পর্শ করতে হবে। এই ছবিতে CD-এর নতুন অবস্থানকে C_1D_1 হিসেবে দেখানো হয়েছে।

এখন $\angle XYX$ কোণটি কোন্ তিনটি সমান কোণে ভাগ করা হল? এরা $\angle XYD_1$, $\angle D_1YC_1$ আর $\angle C_1YZ$। মেপে দেখো, তিনটে কোণ সমান হল কি না।

ছোট বড় পিজবোর্ডের এমন আকার তোমরা নিজেরাও ইচ্ছে করলে তৈরি করতে পারো।

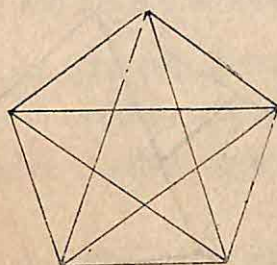
প্রথমে যে কোনো একটি অর্ধবৃত্ত আঁকো। অর্ধবৃত্তের কেন্দ্র C, ব্যাসের ওপরে অর্ধবৃত্তের D আর একটি বিন্দু। আবার CD = DA এই শর্ত মেনে কাগজের যে কোনো আকার তৈরি করলেই কাজ চলে।

শুধু চাঁদার সাহায্যে নয়, জ্যামিতিক দিক দিয়েও প্রমাণ করা যায় যে, তিনটে কোণই সমান।

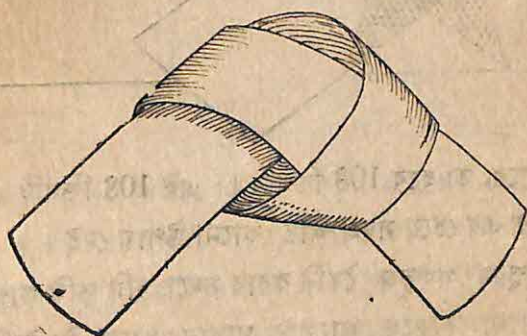
সূক্ষ্মকোণ মাপার বেলায় অর্ধবৃত্তটা ছোট হলেও চলে। কিন্তু সূক্ষ্ম কোণটা যদি খুব ছোট হয়ে যায়, তাহলে এই নকশার আকারটা কোণের উপরে বসাতে অসুবিধে হতে পারে। তবু চিন্তার কোনো কারণ নেই। কোণটাকে দ্বিগুণ ক'রে নিলেই হল। কোণ দ্বিগুণ মানে অনেকটা বড় হয়ে গেল। তখন আর নকশাটা বসাতে কোনো অসুবিধে হওয়ার কথা নয়। এই দ্বিগুণ কোণটাকে সমান তিনভাগ ক'রে আবার প্রত্যেকটা ভাগকে অর্ধেক ক'রে নিলেই হল। এই অর্ধেক কোণটিই প্রথম নেওয়া কোণের তিন ভাগের এক ভাগ।

কাগজের কালিতে সুষম পঞ্চভুজ আঁকবে কেমন ক'রে?

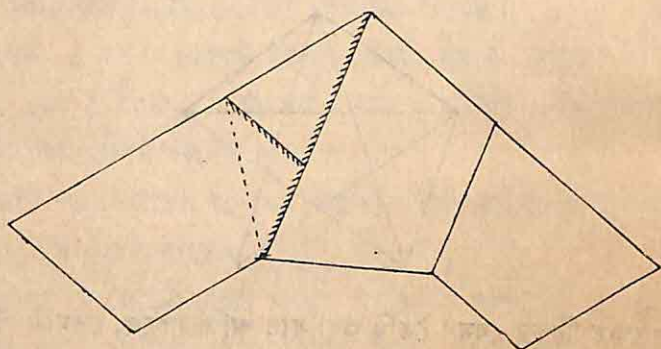
এবারে কাঁটা, কম্পাস, স্কেল বা পেনসিলে হাত না দিয়েই শুধু দু'টো হাতে কাগজের একটা নকশা তৈরি ক'রেই একটা নির্দিষ্ট

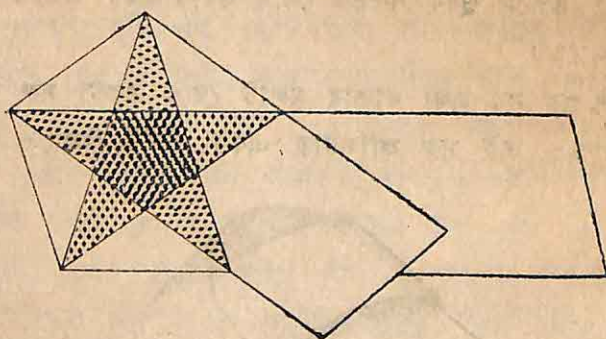
কোণের হিসেব কী ভাবে বের করা যায়, বলবো। এটা হল খালি হাতে তৈরি একটা পঞ্চভুজ, যেমন তেমন পঞ্চভুজ নয়, এ এমন পঞ্চভুজ যার পাঁচটা বাহুই সমান। তিনটে যে কোনো বাহু নিয়ে

ঘেরা ক্ষেত্র ত্রিভুজ যেমন তৈরি করা যায় অতি সহজে, তেমনি পাঁচটা বাহু নিয়ে পঞ্চভুজ তৈরি করাও কঠিন নয়। কিন্তু ত্রিভুজের তিনটে বাহুকে সমান রাখার মত পঞ্চভুজের পাঁচটা বাহুকে সমান রাখতে গেলেই অসুবিধে। তবু সমবাহু ত্রিভুজ তৈরি করা যায়, কিন্তু পাঁচটি সমান বাহুর সুষম পঞ্চভুজ?

হাতে কলমে সুষম পঞ্চভুজ তৈরি করার একটা অত্যন্ত মজার কৌশল আছে।

বেশি পুরু নয় লম্বা খাতার মলাট থেকে একটা সরু ফালি কেটে নাও। এই সরু ফালিটায় একটা গিঁট ফেলতে হবে।

মলাট বেশি পুরু হলে গিঁট ফেলার সময়ে অসুবিধে—ভেঙ্গে গেলে

তাতে আর গিঁটই পড়বে না। আর বেশি প্যাতপ্যাতে হলে চেহারাটা এমন দেখাবে যে, তাতে উদ্দেশ্যটাই মাটি হয়ে যাবে।

এই ফেলা গিঁটেই আছে সুষম পঞ্চভুজের চেহারাটি। এর

যে কোনো পিঠেই তুমি চারটে বাহু দেখতে পাবে। আর ফাঁকা দুটো বাহুর প্রান্তবিন্দু যোগ ক'রে পঞ্চম বাহুটার হিসেব পাওয়া কঠিন নয়।

পঞ্চভুজের এক একটা শীর্ষের কোণের মাপ কত? মাপলে

দেখতে পাবে, তা হবে 108 ডিগরি। এই 108 ডিগরি কোণ বের করার জন্যে এর চেয়ে সহজ আর কোনো উপায় নেই।

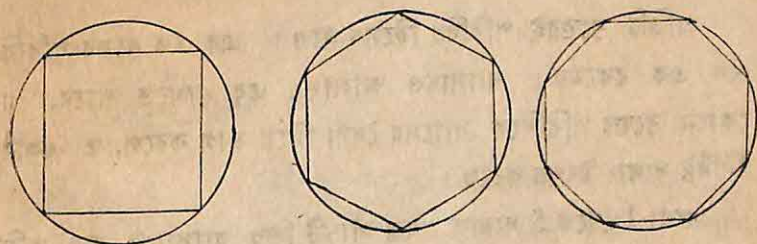
এই সুষম পঞ্চভুজ তৈরি করার সময়ে যদি তুমি কাগজটা খুবই পাতলা নাও, তাহলে আলোর সামনে ধরলে উল্টোদিক থেকে একটা পঞ্চমুখী তারা তোমার নজরে আসবে।

৪ একটা বৃত্তের পরিধি মাপবে কি ক'রে ?

বালির উপরে খোঁটা পুঁতে সেই খোঁটায় দড়ি বেঁধে একটা নির্দিষ্ট মাপের বৃত্ত আঁকতে পারলে খুব ভাল হয়। বালিতে বৃত্তটা ফুটে উঠবে খুব স্পষ্ট হ'য়ে। বালির বদলে নরম মাটিও খারাপ হবে না।

এই যে বৃত্তটা হল, এর পরিধির পরিমাপ কত ?

মাটিতে খাঁজের মধ্যে বৃত্তের যে চেহারাটা ফুটে উঠেছে, সেটা পুরোটা জুড়ে টানা দড়ি বসিয়ে, সেই দড়ির মাপ থেকে বৃত্তের পরিধির হিসেব পাওয়া যায়। খাতার পাতায় কাঁটা কম্পাস দিয়ে বৃত্ত এঁকে সেখানে দড়ি বা সুতো বসিয়ে পরিধির মাপ ঠিক করতে গেলে তা এলোমেলো হয়ে যেতে পারে। অথচ মাটিতে বা বালিতে হিসেবটা আসে অনেক ভালভাবে।

যাই হোক আর যেখানেই হোক, তিনটে একই ব্যাসার্ধের বৃত্ত

নাও। তিনটে বৃত্তের ভেতরে তিনটে বহুভুজ রয়েছে। প্রথমটাতে বাহুর সংখ্যা 4, দ্বিতীয়টাতে 6 আর শেষটাতে 8।

এক একটা বহুভুজের বাহুগুলি যদি দৈর্ঘ্যে পরস্পরের সমান অর্থাৎ বহুভুজগুলি সুষম হলে যে কোনো বহুভুজের বাহুর দৈর্ঘ্যকে বাহুর সংখ্যা দিয়ে গুণ করলেই পরিসীমা অর্থাৎ সব কটা বাহুর

মিলিত দৈর্ঘ্য বেরিয়ে আসে। তা না হলে বিভিন্ন বাহুর দৈর্ঘ্য আলাদা আলাদা মেপে যোগ করতে হয়।

এখন যে বৃত্তের ভেতরে চারটি বাহুর ক্ষেত্রটি আছে, মেপে দেখো, তার পরিসীমা যা হবে ছ'টি বাহুযুক্ত বহুভুজের পরিসীমা তার চেয়ে বেশি হবে। আটটি বাহুর বহুভুজের বেলায় পরিসীমা আরও বাড়বে।

বৃত্তের ভেতরের বহুভুজের বাহুর সংখ্যা এইভাবে যদি আরও বাড়িয়ে যাও, তাহলে কি দেখবে? বাহুর সংখ্যা যত বাড়বে, পরিসীমার দৈর্ঘ্য তত বেড়ে যাবে আর ক্রমে ক্রমে এই দৈর্ঘ্য বৃত্তের পরিধির প্রায় সমান হয়ে আসবে। বৃত্তের ভেতর যদি বারো বাহুর একটা বহুভুজ নিতে তাহলে তার পরিসীমা বৃত্তের পরিধির আরও কাছাকাছি চলে আসতো।

এখন যে কোনো বৃত্ত আঁকার সময়ে বৃত্তের ব্যাসার্ধ তুমি জানতে পারছোই। ব্যাসার্ধ মানে ব্যাসের অর্ধেক। তাহলে ব্যাসার্ধ থেকে ব্যাস জেনে নিতে অসুবিধে নেই। এবারে ইচ্ছেমতো ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসার্ধের ভিন্ন ভিন্ন বৃত্ত অঙ্কন কর।

প্রতিটি বৃত্তেরই পরিধির হিসেব নাও। এক এক বৃত্তের পরিধি এক এক রকমের। ব্যাসার্ধও আলাদা, তবু দেখতে পাবে, যে কোনো বৃত্তের পরিধিকে ব্যাসের দৈর্ঘ্য দিয়ে ভাগ করলে, তা একটা নির্দিষ্ট সংখ্যা উৎপন্ন করছে।

ধরো 1 থেকে 5 সংখ্যক পর্যন্ত পাঁচটি ভিন্ন ব্যাসার্ধের বৃত্ত তুমি এঁকেছো। লিখে রাখো ঃ

1 সংখ্যক বৃত্তের ব্যাস =
পরিধি =
2 সংখ্যক বৃত্তের ব্যাস =
পরিধি =

3 সংখ্যক বৃত্তের ব্যাস =
পরিধি =
4 সংখ্যক বৃত্তের ব্যাস =
পরিধি =
5 সংখ্যক বৃত্তের ব্যাস =
পরিধি =

এবার যে কোনো বৃত্তের পরিধিকে সেই বৃত্তের ব্যাস দিয়ে ভাগ ক'রে নির্দিষ্ট সংখ্যাটি বের করার চেষ্টা করো। এই ভাগের মানের হেরফের হয় না বলে আমরা এটিকে বলি ধ্রুবক। কিন্তু এর নাম 'পাই'। 'পাই' একটি গ্রীক অক্ষর। এটির চেহারা 'π'।

যাই হোক, বৃত্তের পরিধিকে ব্যাস দিয়ে ভাগ করে 'π'-এর মান কত পেলে ?

কোনো বৃত্তের পরিধিকে ব্যাস দিয়ে ভাগ করলে পূর্ণ সংখ্যায় যা পাওয়া উচিত, তা হল 3। কিন্তু সমস্ত উত্তরটা পূর্ণ সংখ্যায় আসবে না। ভগ্নাংশ জড়িয়ে প্রায় যে উত্তরটা পাওয়া যাবে, তা হল $3{\cdot}14\cdots$। দশমিকে না গিয়ে অপ্রকৃত ভগ্নাংশে তা হবে প্রায় $\frac{22}{7}$।

তাহলে সংক্ষেপে পাওয়া যায়,

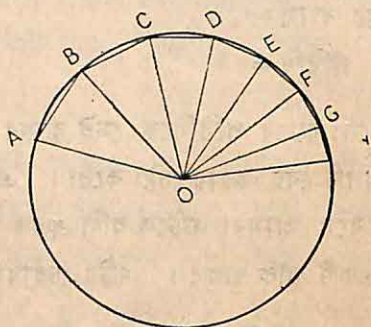
$$\frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}} = \text{ধ্রুবক} = \pi$$

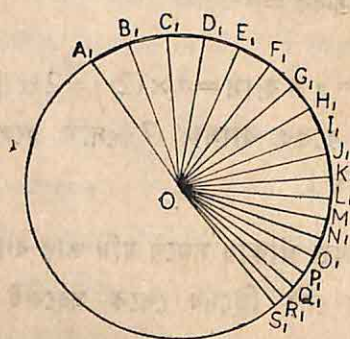
সুতরাং পরিধি $= \pi \times$ ব্যাস $= \pi \times (2r) = 2\pi r$ [$r =$ ব্যাসার্ধ]

অর্থাৎ কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ 7 সেমি হলে পরিধির দৈর্ঘ্য দেখবে প্রায় 44 সেমি।

তাহলে কোনো বৃত্ত আঁকার সময়ে যদি তার ব্যাসার্ধটুকুর হিসেব রাখা যায়, তাহলে সেই হিসেব থেকে সহজেই বৃত্তের পরিধিরও একটা মাপ পাওয়া যাবে।

বৃত্তের ক্ষেত্রফল বের করবে কি ক'রে ?

একটা বৃত্তের পরিধির উপরে A, B, C, D, E, F, G···এর মত অনেক বিন্দু নাও। বিন্দুগুলি এমনভাবে নিতে হবে যাতে

AB > BC > CD > DE > EF > FG >···হয়। এখন AB সরলরেখা একটি জ্যা। সেইরকম BC, CD···এর মত অন্যান্য সরলরেখাও। আর $\overset{\frown}{AB}$ একটি বৃত্তাংশ অর্থাৎ একটি চাপ। সেইরকম BC, CD,··· এরাও সবাই চাপ।

একটা কথা নিশ্চয়ই বুঝতে পারছো, তা ছাড়া হাতে কলমে মাপতে পারলেও দেখতে পেতে, জ্যাগুলি যত ছোট হবে, ততই জ্যা-এর দৈর্ঘ্য আর চাপের দৈর্ঘ্য প্রায় সমান সমান হয়ে আসবে।

এবারে প্রতিটি জ্যাকে ভূমি ধরে কেন্দ্রের সঙ্গে তার হু'টো প্রান্ত যোগ

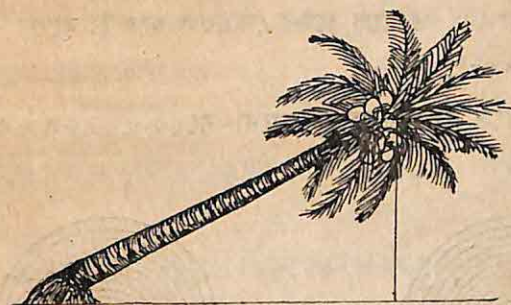
ক'রে এক একটা ত্রিভুজ তৈরি করো। এই সব ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের যোগফল কি বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমান বলা যায়?

এখন পরিধির উপরে বিন্দুগুলি যত কাছাকাছি নেবে, ততই জ্যায়ের দৈর্ঘ্য আর চাপের দৈর্ঘ্য কাছাকাছি চলে আসবে আর এইভাবে এগোতে এগোতে একেবারে চূড়ান্ত অবস্থায় সব কটা ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল মিলে বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সঙ্গে সমান হবে।

এখানে এই পদ্ধতিতে বৃত্তের ক্ষেত্রফল বের করা হবে।

কিন্তু এক একটা ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত?

যে কোনো ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল তার ভূমি আর উচ্চতার গুণফলের অর্ধেক। কিন্তু উচ্চতা বলতে কি বোঝানো হয়?

যে ল্যাম্প পোস্ট সোজা হয়ে দাঁড়িয়ে আছে রাস্তায় তার উচ্চতা বুঝতে অসুবিধে হয় না। কিন্তু যে নারকেল গাছ বেঁকে উঠেছে মাটি থেকে তার উচ্চতা কতটা?

নারকেল গাছের মাথা থেকে মাটি পর্যন্ত যে সরলরেখা টানা প্রায় সরাসরি, যা ভূমির সঙ্গে 90 ডিগরি কোণ করে, সেই সরলরেখার দৈর্ঘ্য যা, নারকেল গাছের উচ্চতাও তাই।

ত্রিভুজের বেলাতেও উচ্চতা বলতে শীর্ষবিন্দু থেকে ভূমির উপরে লম্বভাবে টানা সরলরেখাকে বোঝানো হয়।

এবারে সম্পূর্ণ বৃত্তটার ক্ষেত্রফল বের করার জন্যে বৃত্তকে যতগুলো ছোট ছোট ত্রিভুজে ভাগ করা হয়েছে, তার প্রত্যেকটার ক্ষেত্রফল এক এক ক'রে বের করো।

ভূমি যখন ছোট হতে হতে একেবারে চরম অবস্থায় এসে পৌঁছোয়, তখন ত্রিভুজটির উচ্চতা বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হয়ে আসবে।

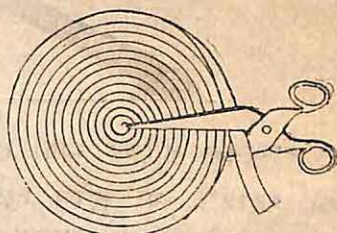
যে কোনো একটি ছোট ত্রিভুজ A_1OB_1 ধরে নাও। তাহলে ত্রিভুজ A_1OB_1-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}A_1B_1 \times r$ (r বৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং A_1B_1 জ্যা)

যদি এর সঙ্গে ত্রিভুজ B_1OC_1-এর ক্ষেত্রফল যোগ করি, তাহলে ত্রিভুজ B_1OC_1-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}B_1C_1 \times r$ (B_1C_1 জ্যা)

এইভাবে বৃত্ত থেকে উৎপন্ন সব কটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল যোগ ক'রে পাবে

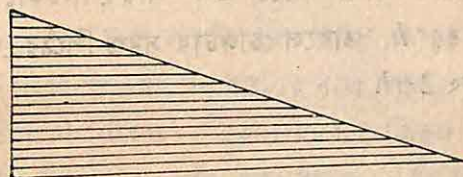
$$= \frac{1}{2}(AB + BC + CD + \cdots).\, r$$

এখন এক একটি ত্রিভুজ ছোট বলে AB জ্যা = AB চাপ। অর্থাৎ $AB + BC + CD + \cdots$এর যোগফলই বৃত্তের পরিধি অর্থাৎ $2\pi r$-এর সমান। তাহলে বৃত্তের ক্ষেত্রফল হবে $\frac{1}{2}$. বৃত্তের পরিধি $.r$ $= \frac{1}{2}.2\pi.r = \pi r^2$.

এখন হাতে কলমেও তুমি কোনো বৃত্তের ক্ষেত্রফল বের করতে পারো।

একটা ফিল্ম রিলের একেবারে উপরের বৃত্তটার কথা কল্পনা কর ; না হলে সুন্দর ক'রে কাগজের ফিতে কেটে ফিল্ম রিলের মত একটা রিল তৈরি ক'রে নাও।

এই বৃত্তাকার রিলের নিশ্চয়ই একটা ব্যাসার্ধ আছে। ধরা যাক ব্যাসার্ধটা r। এখন যে কোনো একটা ব্যাসার্ধ বরাবর যদি এই

রিলটাকে কাটা যায়, তাহলে বাইরে থেকে ভেতর দিকের প্রত্যেকটা পরিধি আলাদা হয়ে যাবে আর এই সমস্ত পরিধিকে পর পর সাজিয়ে ত্রিভুজের আকারের একটা ক্ষেত্র পাবে।

এই ত্রিভুজটা কি রকম ত্রিভুজ হবে ?

আঁকলে নজরে আসবে এই ত্রিভুজটা হবে একটা সমকোণী ত্রিভুজ। এখন এই যে সম্পূর্ণ ত্রিভুজটা হল, এ যতটা ক্ষেত্র জুড়ে রয়েছে সমস্ত বৃত্তও নিশ্চয়ই ততটা ক্ষেত্র জুড়ে থাকবে। তাহলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সঙ্গে সমান।

এখন ত্রিভুজের উচ্চতা মেপে দেখো, ভূমিরও মাপ নাও।

ত্রিভুজে উচ্চতা $= r$

ত্রিভুজের ভূমি কত ?

ত্রিভুজের ভূমি বাইরের বৃত্তের পরিধির সমান অর্থাৎ তা হবে $2\pi r$।

তাহলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

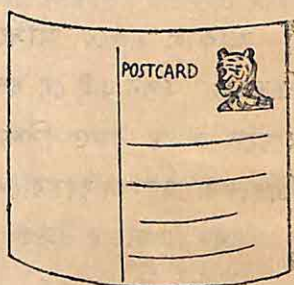
$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^3$।

বৃত্তের ক্ষেত্রফলও একই হবে নিশ্চয়ই। অর্থাৎ যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ r, তার ক্ষেত্রফল πr^3।

এখন এই বৃত্তের ক্ষেত্রফল থেকে একটা গোলাকার চোঙের ক্ষেত্রফলও মাপা যায়। কেমন করে ?

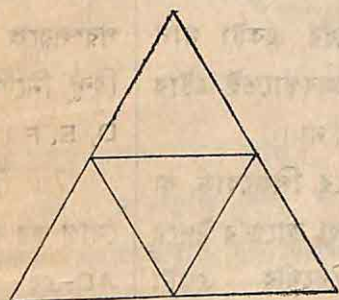
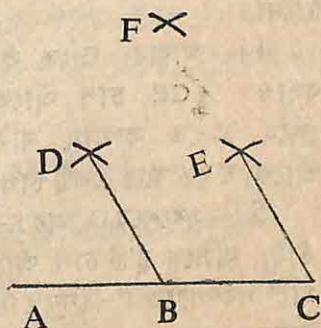
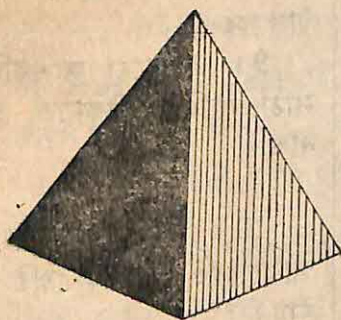
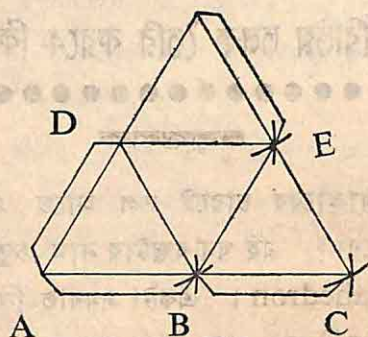
পোস্টকার্ডের মত সমান চওড়া একটা মোটা কাগজ গোল ক'রে নাও। গোল করার সময়ে খেয়াল রেখো, এটা

যেন বেশি সরু বা বেশি মোটা না হয়ে যায়। ফিল্ম বা কাগজের রিল এর মুখে ঠিক মাপে মাপে বসা চাই। এই যে চোঙটা তৈরি করলে এর সমস্ত পিঠের অর্থাৎ এর পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল কত বলতে পারো?

বৃত্তের পরিধি জানা আছে $2\pi r$ আর পোস্টকার্ডের চওড়া বা উচ্চতা যদি হয় h, তাহলে চোঙটার সমস্ত পিঠের ক্ষেত্রফল হবে $2\pi r \times h$ অর্থাৎ $2\pi rh$।

তুমি অবশ্য অন্যভাবেও এই ক্ষেত্রফল ঠিক আছে কিনা মিলিয়ে নিতে পারো। একটা সরাসরি সোজা লাইন টেনে তার উপর দিয়ে কাঁচি চালিয়ে চোঙটাকে কেটে ফেল। দেখবে এটা এখন আর চোঙ নয়। এ হল একটা জমি বা ক্ষেত্র। এর উচ্চতা তো h আগেই মেপেছো। আর দৈর্ঘ্যও মেপে দেখো। যদি দৈর্ঘ্য হয় l, তাহলে দেখবে এই দু'টোর গুণফলই অর্থাৎ lh-ই হবে $2\pi rh$।

৫ বিভিন্ন তলক তৈরি করবে কি ক'রে ?

চতুস্তলক

ত্রিভুজের আকারের চারটে তল আছে এমন একটা ঘন বস্তু তৈরি করতে পারো ? এই ঘন বস্তুটার নাম চতুস্তলক, ইংরেজিতে একে বলে Tetrahedron। একটা সমবাহু ত্রিভুজ থেকে একটা সুন্দর চতুস্তলক তৈরি করা যায় খুব সহজে। ত্রিভুজটার তিনটে বাহুর মধ্যবিন্দুগুলি আগে বের ক'রে নিয়ে একটার সঙ্গে অন্যটার

যোগ কর। তারপর ভাঁজ বরাবর ভেঙ্গে খোলা মুখে জুড়লেই চতুস্তলকটি পেয়ে যাবে।

একটা চতুস্তলক তৈরির নির্দেশ

1। কম্পাসের সাহায্যে 5 সেমি ব্যাসার্ধের একটা মাপ নাও। কোনো অবস্থাতেই এটার হেরফের কোরো না।

2। এবারে পিজবোর্ড বা মোটা কাগজ বা কার্ডের উপরে 10 সেমি দৈর্ঘ্যের একটা সরলরেখা টানো। সরলরেখাটিকে বলো ABC।

3। এখন A-তে কম্পাসের কাঁটা বসিয়ে DB একটা চাপ টানো।

4। আবার B-তে কাঁটা বসাও। CE চাপ আঁকো। শেষে C-তে কম্পাস বসিয়ে আঁকো E-তে আর একটি চাপ।

5। সর্বশেষে D আর E-তে কাঁটা বসিয়ে ছ'টি চাপ আঁকো যারা পরস্পরকে F-বিন্দুতে ছেদ করবে।

6। এবারে চাপগুলি যেখানে পরস্পরকে ছেদ করছে সেখানে বিন্দু নির্দেশ করো : A, B, C, D, E, F।

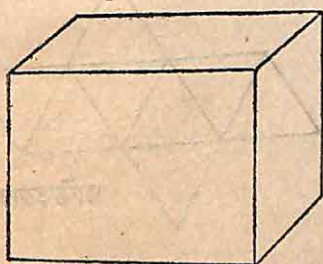
7। বিন্দুগুলি চিত্র অনুযায়ী যোগ কর আর AB, BC, EF ও AD-এর কাছে কাগজ একটু বাড়িয়ে রাখো।

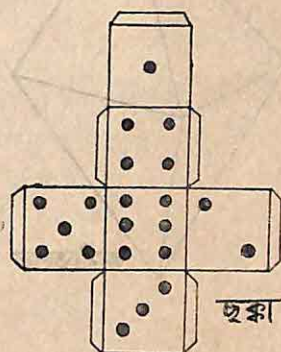
8। এইবার বাড়ানো অংশ সমেত ABCEFDA কেটে নিয়ে ভাঁজ কর।

9। বাড়ানো অংশগুলিতে আঠা লাগিয়ে ঠিকমতো জুড়ে নাও।

10। এইভাবে অনেক বড় আকারেরও চতুস্তলক তৈরি করা যায়।

ষট্তলক

এবারে একটি ষট্‌তলক বা ঘন তৈরি করবার চেষ্টা করো চতুস্তলকের মত। ষটতলকের চেহারাটা হবে ঠিক যেন একটা লুডোর ছক্কা।

ষট্তলক

ছক্কা

প্রথমে নক্সার মত ক'রে কাগজ কেটে নাও। এতে ছক্কার ছটা পিঠে তো আছেই। সেই সঙ্গে বাড়তি একটু অংশ রাখতে হচ্ছে ভাঁজে ভাঁজে। কাগজ কেটে ছক্কার মত মুড়বার সময়ে বাড়তি অংশটায় আঠা দিতে হবে জুড়বার জন্যে।

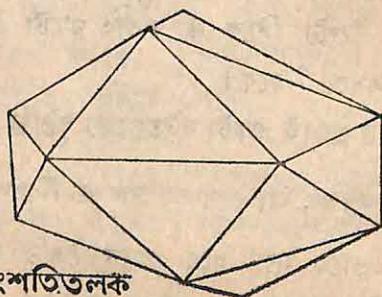
ছক্কাটা তৈরির সময়ে কাগজটা যথেষ্ট মোটা নিও। অথচ ভাঁজ যেন পড়ে সেটাও দেখতে হবে।

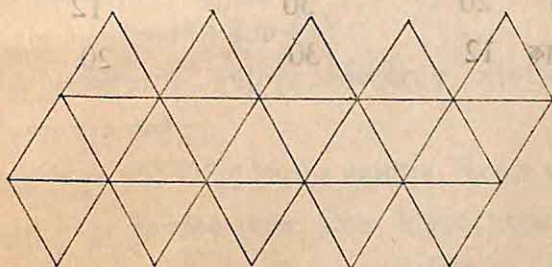
এবারে সংখ্যা বসানোর পালা। যে পিঠে 1 বসাবে, তার উল্টো পিঠে 6, আবার 2 যেখানে তার উল্টো মুখে 5, সেইরকম ভাবে 3-এর উল্টো দিকে 4 অর্থাৎ দু'টো উল্টো মুখের সংখ্যার যোগফল সব সময়ে 7 হবে।

এই লুডোর ছক্কাই একটা ষট্তলকের দৃষ্টান্ত।

ষট্তলক, দ্বাদশতলক ও বিংশতিতলক

এই রকমভাবে নক্সা ধরে কেটে তৈরি করা যায় অষ্টতলক, দ্বাদশতলক, বিংশতিতলক। এইসব তলকের প্রত্যেকটার নামের

মধ্যেই তলের বা পিঠের সংখ্যার উল্লেখ। অষ্টতলকে তলের সংখ্যা 8, দ্বাদশতলকে 12, বিংশতিতলকে 20।

এইসব তলকের তলের সংখ্যা এক এক রকমের, শীর্ষের সংখ্যা আর ধারের সংখ্যার মধ্যেও মিল নেই।

চতুস্তলকে শীর্ষের সংখ্যা যত, ধারের সংখ্যার সঙ্গে তার মিল পাওয়া যাবে না, যদিও তলের সংখ্যা শীর্ষের সংখ্যার সঙ্গে মিলে যাচ্ছে। কিন্তু ষট্‌তলক, অষ্টতলক, দ্বাদশতলক, বিংশতিতলকের

বিংশতিতলক

বেলায় একটার সঙ্গে আর একটার মিল নেই। ষটতলকে শীর্ষসংখ্যা 8, ধারের সংখ্যা 12, তলের সংখ্যা আবার 6। সেইরকম অষ্টতলক, দ্বাদশতলক, বিংশতিতলকের ক্ষেত্রে একটা থেকে আর একটা ভিন্ন। কিন্তু তলক যেমনই হোক না কেন, শীর্ষসংখ্যা, তলের সংখ্যা আর ধারের সংখ্যার মধ্যে বরাবর একটা সম্পর্ক লক্ষ্য করা যায়। সে সম্পর্কে নজরে আসে,

ধারের সংখ্যার সঙ্গে 2 যোগ করলে যা হয়, তা শীর্ষসংখ্যা আর তলের সংখ্যার মিলিত যোগফলের সমান। শীর্ষসংখ্যাকে ক বলেছি, তলের সংখ্যা গ আর ধারের সংখ্যা খ হলে

$$\text{ক} + \text{গ} = \text{খ} + 2$$

এখন চতুস্তলক, ষট্‌তলক, অষ্টতলক, দ্বাদশতলক, বিংশতিতলকের বেলায় ধারের সংখ্যা, তলের সংখ্যা আর শীর্ষের সংখ্যার যে কোনো দু'টো দেওয়া থাকলে তৃতীয়টা নিশ্চয়ই বের করতে পারবে খুব সহজে।

নাম	শীর্ষসংখ্যা ক	ধারের সংখ্যা খ	তলের সংখ্যা গ	ক + গ
চতুস্তলক	4	6	4	৪
ষট্‌তলক	8	12	6	14
অষ্টতলক	6	12	8	14
দ্বাদশতলক	20	30	12	32
বিংশতিতলক	12	30	20	32

৬ বীজগাণিতিক সূত্র জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ করবে কেমন ক'রে ?

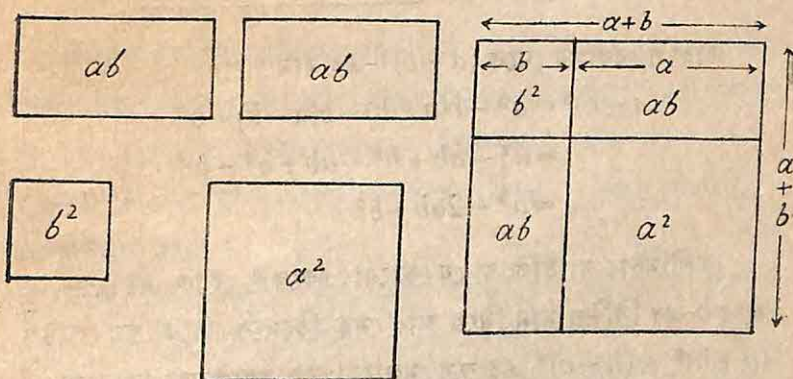
আমরা সবাই বীজগণিতের সাহায্যে $(a+b)^2$ অর্থাৎ $(a+b)$-এর বর্গের মান জানি। তা হল

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

এখন পোস্টকার্ডে বর্গাকৃতি রেখাঙ্কনের সাহায্যে দেখি $(a+b)^2$-এর মান কত ?

a আর b-কে দু'টি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সরলরেখা হিসেবে ধরে নাও। তাহলে $a+b$-এর দৈর্ঘ্যটিও মেপে নিতে পারবে সহজে। এবার $a+b$ দৈর্ঘ্যের দু'টো লম্ব অভিমুখী সরলরেখা নিয়ে $(a+b)^2$ অর্থাৎ $(a+b)$ দৈর্ঘ্যের বর্গাকৃতি ক্ষেত্রটি তৈরি কর।

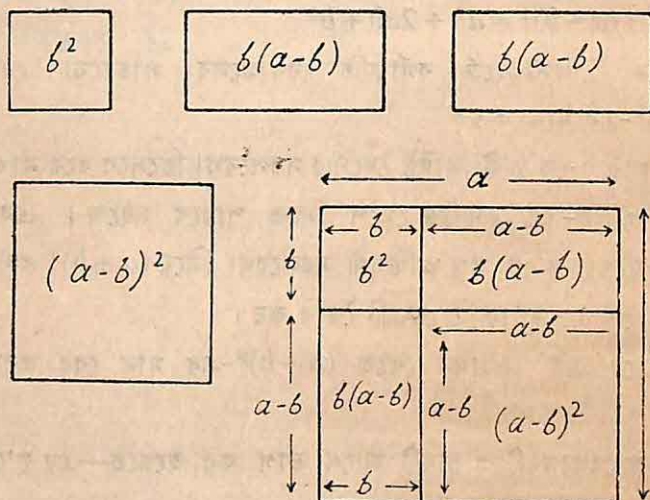
এবারে এই রেখাঙ্কন থেকে $(a+b)^2$-এর মান বের করতে হবে।

সমস্ত রেখাঙ্কনটিকে চারটি অংশে ভাগ করা হয়েছে—এর দু'টো

বর্গাকার, অন্য দু'টো আয়তাকার। ক্ষুদ্রতর বর্গাকার অংশটি b^2, অন্যটি a^2। বাকি দু'টো অংশের প্রত্যেকটা ab। ছবি দেখে বুঝে নিতে নিশ্চয়ই কোনো অসুবিধে হচ্ছে না।

তাহলে $(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

এ রকমভাবে $(a-b)^2$-এর মানও বের করা যায় সহজে।

এখানে আগের মতনই চারটে অংশ থাকবে। এই চারটে অংশ হবে b^2, $b(a-b)$, $b(a-b)$, $(a-b)^2$।

তাহলে রেখাঙ্কন থেকে $(a-b)^2$-এর মান পাবো

$$(a-b)^2 = a^2 - b(a-b) - b(a-b) - b^2$$

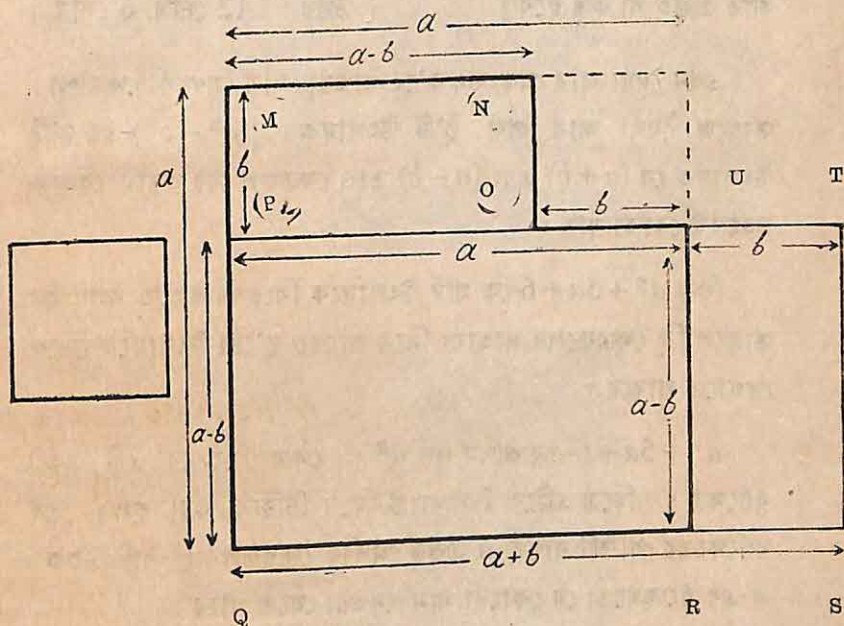
$$= a^2 - ab + b^2 - ab + b^2 - b^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

সেন্টিমিটার বা ইঞ্চি বা যে কোনো এককেই হোক না কেন, a আর b-এর বিভিন্ন মান নিয়ে আর সেই হিসেবে চৌকো ঘর কেটেও $(a+b)^2$ ও $(a-b)^2$-এর সূত্র মেলানো চলে বর্গক্ষেত্রের সাহায্যে।

এখন $(a+b)^2$ বা $(a-b)^2$-এর বেলায় যে ক্ষেত্র পাওয়া যায়, তা বর্গক্ষেত্র। কিন্তু $a^2 - b^2$-এর সূত্রের বেলায় কি হবে? $a^2 - b^2$-এর অর্থ a-এর বর্গ থেকে b-এর বর্গ বাদ। বীজগণিতের

সূত্র থেকে তোমরা জানো তা $(a+b)(a-b)$-এর সমান অর্থাৎ $a^2 - b^2$-এর দুটি উৎপাদক $a+b$ ও $a-b$।

কিন্তু চিত্র থেকে তা হিসেব করবে কেমন ক'রে ?

b-দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রটি কেটে নেওয়ার পরে a দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের যে অবশিষ্ট অংশ পড়ে থাকে, তা মোটা দাগ দিয়ে দেখানো হয়েছে। বুঝতে পারছো, এটাই নিশ্চয় হবে a^2-b^2। আবার এই ক্ষেত্রটাই $(a+b)(a-b)$-এর সমান। কিন্তু কি ভাবে তা দেখানো যাবে ?

এখন O-এর কাছে কাঁচি ধরে আয়তাকার MNOP কেটে নাও। এর দৈর্ঘ্য $a - b$, প্রস্থ b। আর MN ধার UR-এর সঙ্গে সমান বলে MN ধারকে UR-এর পাশে এনে বসালে তা মিলে যাবে। ফলে শেষ পর্যন্ত যে চেহারাটা পাওয়া যাবে, সেটা একটা আয়তক্ষেত্রের চেহারা। এই আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $a+b$ আর প্রস্থ $a-b$। তাহলে ক্ষেত্রফল $(a+b)(a-b)$।

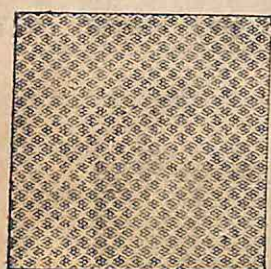
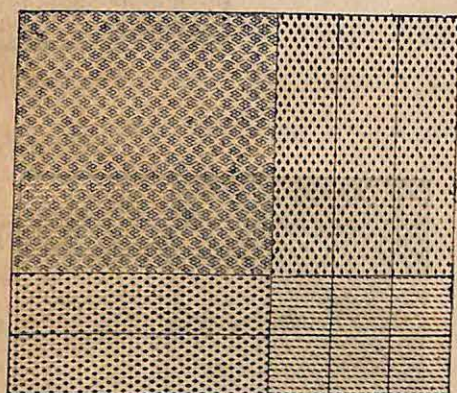
এবারে বলো দেখি, একটা 9 সেমি দৈর্ঘ্যের বর্গক্ষেত্র থেকে যদি 3 সেমি দৈর্ঘ্যের বর্গক্ষেত্র একটা কেটে নেওয়া যায় এক কোণ থেকে, তাহলে শেষ পর্যন্ত যে আয়তক্ষেত্রটা হবে তার দৈর্ঘ্য কত? আর প্রস্থই বা কত হবে? [উত্তর : 12 সেমি, 6 সেমি]

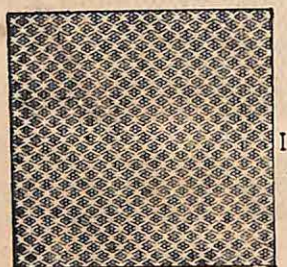
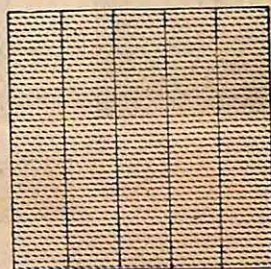
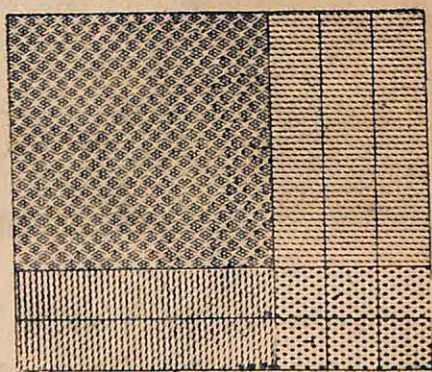
এখন দৈর্ঘ্য আর প্রস্থ গুণ ক'রে পাওয়া যায় সম্পূর্ণ ক্ষেত্রফল। তাহলে দৈর্ঘ্য আর প্রস্থ ছ'টি উৎপাদক। (a^2-b^2)-এর ছ'টি উৎপাদক যে $(a+b)$ এবং $(a-b)$ তাও ক্ষেত্রফল বের করার বেলায় সহজেই বোঝা যায়।

কিন্তু a^2+5a+6-কে যদি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে বলা হয় তাহলে কি ক্ষেত্রফলের সাহায্য নিয়ে তাকেও ছ'টো উৎপাদকে ভেঙ্গে দেখাতে পারবে?

a^2+5a+6-এর প্রথম পদ a^2। ক্ষেত্র হিসেবে এটি একটি বর্গক্ষেত্র। চিত্রে এটিকে I-সংখ্যাটি দিয়ে চিহ্নিত করা হল। এই বর্গক্ষেত্রের প্রতিটি বাহুই a একক অর্থাৎ ক্ষেত্রফল a^2-বর্গ একক। a-এর ইচ্ছেমতো যে কোনো মান নেওয়া যেতে পারে।

এবারে $5a$-এর হিসেব নাও। $5a$-ও আছে বর্গ এককে। এর বেলাতে আয়তক্ষেত্রের এক বাহু a একক হলে অন্য বাহু 5-একক। কিন্তু 5 একক মানে কতটা? 1-এককের হিসেব না জানলে 5-একক বের করবো কী করে?

1-একক যে কোনো দৈর্ঘ্য ধরা যাক। 1 সেমি, $1\frac{1}{2}$ সেমি, 2-সেমি—এ-রকম যা ইচ্ছে। এই দৈর্ঘ্য নেওয়ার সময়ে মনে হতে পারে, a^2-বর্গক্ষেত্র আঁকবার সময়ে বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য হিসেবে যে a-দৈর্ঘ্য নিয়েছি, I-এককের ভিন্ন ভিন্ন মানের সঙ্গে তাও বদলে নিতে হবে। কিন্তু না, a^2-যেমন আছে, তেমনিই থাক। আর 1-এককের মান ছ'বার ছ'-রকম নাও।

তাহলে a^2-বর্গ এককের পরে $5a$-বর্গ এককের ক্ষেত্রও নিশ্চয় সহজেই বের করতে পারবে। এটাকে **II** বলি। বৃহত্তর এককের বেলায় **II** (A) আর ক্ষুদ্রতর এককের বেলায় **II** (B) বলা যাক। বাকি রইল a^2+5a+6-এর 6 বর্গ একক। এই 6-বর্গ একক ক্ষেত্রটার চেহারা কি রকম? ক্ষেত্রের চেহারা প্রস্থে 1 একক ধরলে দৈর্ঘ্যে 6 একক। এ হল **III** সংখ্যক ক্ষেত্র আর আবার আগের মত **III** (A) আর **III** (B)।

এখন এই যে a^2, $5a$ আর 6-এর জন্যে 3-টে ক'রে ক্ষেত্র পাওয়া গেল, এই তিনটে মিলে কি কোনো একটা সুন্দর সাজানো ক্ষেত্রের চেহারা ফুটে ওঠে ?

প্রথমে নাও I, II(A) আর III(A)। তারপরে I যেমন আছে তেমনই থাকবে, II(A) আর III(A) বদলে নেবে **II(B)** আর **III(B)**।

কাগজ কেটে পাশাপাশি মিলিয়ে বসাও। না, সুষম কোনো

চেহারা আসছে না। এবারে উপরে নিচে। না, তাতেও নির্দিষ্ট কোনো সুষম ক্ষেত্রের চেহারা এল না।

এক কাজ করা যেতে পারে। a^2-বর্গক্ষেত্রটি সোজাভাবে বসিয়ে $5a$-এর ক্ষেত্রটি সমান পাঁচ ভাগে ভাগ ক'রে নাও। যেমন তেমন ভাবে ভাগ করলে চলবে না। আকারে এটা একটা আয়তক্ষেত্র। এর একটা বাহু a-একক, অন্য বাহু 5 একক। 5 এককের দৈর্ঘ্যকে সমান পাঁচটা অংশে অর্থাৎ 1 একক হিসেবে ভাগ ক'রে a বাহুর দৈর্ঘ্য বরাবর সমান পাঁচটা টুকরোয় কেটে নাও। এর প্রত্যেকটা অংশের ক্ষেত্রফল কত বলতে পারো ? তা হবে a বর্গ একক।

এবারে ওই পাঁচটা টুকরোর তিনটে টুকরো নিয়ে **I** সংখ্যক ক্ষেত্রের বাহুর পাশাপাশি মেলাবার চেষ্টা করো। টুকরোগুলোর প্রত্যেকটার দৈর্ঘ্য a। ফলে **I** সংখ্যক ক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যের সঙ্গে মিলে গেল। বাকি রইল আর দু'টো অংশ। এখন এই বাকি দুটো অংশের a-একক দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বাহুগুলি **I** সংখ্যক ক্ষেত্রের বাহুর পাশে এনে ওই ক্ষেত্রের নিচের দিকে লাগানো হল। একটা চৌকোশ ক্ষেত্রের চেহারা আসছে। কিন্তু একটা অংশ এখনও ফাঁক রয়ে গেল যে। সে ফাঁক পূরণ হবে **III**-সংখ্যক ক্ষেত্রটি দিয়ে।

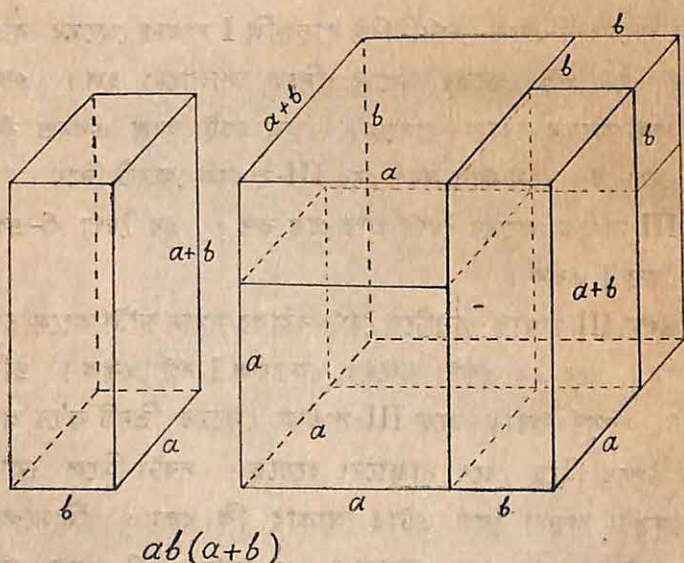
III-সংখ্যক ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য আর প্রস্থ কত ? এর দৈর্ঘ্য 6-একক আর প্রস্থ 1 একক।

এখন **III** সংখ্যক ক্ষেত্রটিকে দৈর্ঘ্য বরাবর সমান ছ'টা অংশে ভাগ করলাম। এর এক একটা অংশের ক্ষেত্রফল 1 বর্গ একক। ছবির ক্ষেত্রটা সম্পূর্ণ করার জন্যে **III**-সংখ্যক ক্ষেত্রের তিনটি ক'রে অংশ এখন উপরে নিচে রেখে সাজানো হয়েছে। সবটা মিলে এবারে যে ক্ষেত্রটা পাওয়া গেল এটার আকার কি রকম ? নিঃসন্দেহে এটা একটা আয়তক্ষেত্রের চেহারা। এর দৈর্ঘ্য $a+3$ একক আর প্রস্থ $a+2$ একক। তাহলে ক্ষেত্রফল হবে $(a+3)\times(a+2)$। অর্থাৎ a^2+5a+6-এর দু'টি উৎপাদক $(a+3)$ ও $(a+2)$।

ঘনকের বীজগাণিতিক সূত্র

$(a+b)^3$-এর মান যে $a^3+b^3+3ab(a+b)$ অর্থাৎ $a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$-এর সমান বীজগণিতে তা প্রমাণ করা কঠিন নয়। কিন্তু $(a+b)$-এর একটা ঘনক তৈরি ক'রে হাতে কলমেও তা দেখানো যায় সহজে।

মনে করো $a=4$ সেমি আর $b=2$ সেমি। তাহলে $a+b=4$ সেমি $+2$ সেমি $=6$ সেমি। সুতরাং $(a+b)^3$-এর মান বের করার অর্থ 6 সেমির একটা ঘনক তৈরি করা। দেখা যাক, 6 সেমির একটা ঘনক থেকে $(a+b)^3$-এর মান যে $a^3+b^3+3ab(a+b)$, তা মেলানো যায় কি না।

$a+b$ অর্থাৎ 6 সেমি দৈর্ঘ্যের একটা ঘনক থেকে a অর্থাৎ 4 সেমি দৈর্ঘ্যের একটা ঘনক কেটে নাও। কোণাকুণি উলটো

মুখ থেকে b-অর্থাৎ 2 সেমি দৈর্ঘ্যের আর একটা ঘনক। ঠিকমতো যদি কাটতে পারো তাহলে দেখবে a দৈর্ঘ্যের ঘনকটির ভেতরের

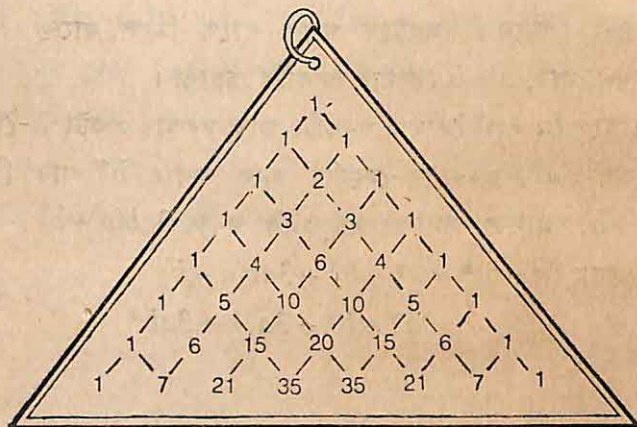
কৌণিক বিন্দুটি b দৈর্ঘ্যের ঘনকটির ভেতরে কৌণিক বিন্দুকে স্পর্শ করবে। a আর b দৈর্ঘ্যের ঘনক দু'টি ছাড়া আরো তিনটি দেশলাইয়ের বাক্সের মতনই, বলা চলে, বাক্স পাবে। এদের বলে সমান্তর ষট্‌ফলক (Parallelopiped)। তিনটিরই দৈর্ঘ্য এক, প্রস্থ এক আর বেধ সমান। প্রত্যেকটিই দৈর্ঘ্যে $a+b$, প্রস্থে a আর বেধে b। তাহলে ঘনফল হবে $ab(a+b)$। এর একটা বসবে a-দৈর্ঘ্যের ঘনকের ডানদিকে, আর একটা উপরে আর অবশিষ্টটা পিছনে। সবটাই খাপে খাপে মিলে যাচ্ছে। সঙ্গে সঙ্গে দেখা যায়, $a+b$ দৈর্ঘ্যের ঘনকটির চেহারা।

তাহলে $(a+b)$ দৈর্ঘ্যের ঘনকটির জন্যে দরকার একটা a-দৈর্ঘ্যের ঘনক অর্থাৎ a^3, একটা b-দৈর্ঘ্যের ঘনক অর্থাৎ b^3 আর তিনটে $ab(a+b)$ ঘনফলের সমান্তর ষট্‌ফলক অর্থাৎ $3ab(a+b)$।

সুতরাং $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$

$$= a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$$

৭ ত্রিভুজাকৃতি সংখ্যার বিন্যাস থেকে বিভিন্ন গুণফল বের করবে কি ক'রে ?

এই যে একটা ত্রিভুজাকৃতি সংখ্যার বিন্যাস নজরে আসে, এর শুরু কিন্তু 1-থেকে। শীর্ষে আছে 1, এই 1 তার দু'বাহু যেন দু'দিকে

বাড়িয়ে দিল, তাই দ্বিতীয় সারিতে এল দু'টি 1। তৃতীয় সারিতে এইভাবে প্রথমে 1, তারপরে 2, শেষে 1। তৃতীয় সারির মাঝে 2-এল দ্বিতীয় সারির দু'টি 1-এর একটি একটি বাহু মিলে। এইভাবে পরের অর্থাৎ চতুর্থ সারিতে 1, 4, 6, 4, 1। পঞ্চম সারিতে 1, 5, 10, 10, 5, 1। তারপর ষষ্ঠ সারিতে 1, 6, 15, 0, 15, 6, 1 আর সপ্তম সারিতে 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1। সারি এইভাবে আরও বাড়িয়ে যাওয়ার চেষ্টা করতে পারো। নিশ্চয়ই কোনো অসুবিধে হবে না।

বলো তো, এর পরে অষ্টম আর নবম সারি কি হবে ?

[অষ্টম সারি : 1 8 28 56 70 56 28 8 1

নবম সারি : 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1]

এই ত্রিভুজাকৃতি সংখ্যার বিন্যাস কি কাজে আসে ?

হ্যাঁ, গুণের সময়ে এই সংখ্যার বিন্যাস দারুণ কাজে লাগে। এক এক সারির সংখ্যা একটা নির্দিষ্ট ধরনের গুণফল গুণ না ক'রে বের করতে সাহায্য করবে।

$x+a$ নিয়ে শুরু করা যাক। $(x+a)$-কে $(x+a)$ দিয়ে গুণ করলে কত হবে ?

$$\begin{array}{l} \quad\; x+a \\ \quad\; x+a \\ \hline 1.x^2 + ax \\ \quad\;\; + ax + 1.a^2 \\ \hline 1.x^2 + 2ax + 1.a^2 \end{array}$$

অর্থাৎ 1 2 1

[x^2-এর সংখ্যা 1, ax-এর সংখ্যা 2, a^2-এর সংখ্যা 1]

এরপর থেকে x^2-এর সংখ্যা 1, ax-এর সংখ্যা 2 বা a^2-এর সংখ্যা 1 না বলে বলবো সহগ অর্থাৎ x^2-এর সহগ 1, ax-এর সহগ 2 আর a^2-এর সহগ 1।

তাহলে এই ত্রিভুজ আকারের তালিকার সাহায্য নিয়ে গুণ না করেই $(x+a)^2$-এর মান বের করা যায় সহজে।

আবার $(x+a)^3$-এর মান বের করবার চেষ্টা করা যাক।

$$\begin{array}{l} 1\,x^2 + 2a.x + 1.a^2 \\ \qquad\quad x+a \\ \hline x^3 + 2ax^2 + a^2x \\ \quad\; + \; ax^2 + 2a^2x + a^3 \\ \hline x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 \end{array}$$

1 3 3 1

[x^3-এর সহগ 1, ax^2-এর সহগ 3, a^2x-এর সহগ 3, a^3-এর সহগ 1]

সংখ্যার ত্রিভুজের চতুর্থ সারিতে পরপর আছে এই 1, 3, 3, 1-ই। তাহলে এখন উলটোদিক দিয়ে সংখ্যার ত্রিভুজের চতুর্থ সারির সংখ্যামালা দেখেই $(x+a)^3$-এর মানও বের করা সম্ভব।

এভাবে $(x+a)^4$-এর মান বের করার সময়ে পরের সারির অর্থাৎ পঞ্চম সারির সাহায্য নিতে হবে। 1 3 3 1 চতুর্থ সারির সংখ্যামালা। এর পরের সারিতে আছে 1 4 6 4 1। এর সাহায্য নিয়ে $(x+a)^4$-এর প্রথম পদ $= 1.x^4$

দ্বিতীয় পদ $= 4.x^3.a$

তৃতীয় পদ $= 6.x^2.a^2$

চতুর্থ পদ $= 4.x.a^3$

পঞ্চম পদ $= 1.a^4$

এই পঞ্চম পদটিই শেষ পদ।

তাহলে,

$$(x+a)^4 = 1.x^4 + 4.ax^3 + 6\,x^2.a^2 + 4.x.a^3 + 1.a^4$$

এই যে ফল পাওয়া গেল, গুণ ক'রে ক্রমে ক্রমে $(a+x)^4$-এর মান করবার চেষ্টা করলেও একই ফল পাওয়ার কথা।

সংখ্যামালার ত্রিভুজটিতে সর্বমোট আটটা সারি। এর শেষ সারিতে আছে 1 7 21 35 35 21 7 1। এর সাহায্যে $(x+a)^7$-এর মান বের করা যায় চিন্তা-ভাবনা না করেই। সহগ ছাড়া পদগুলি বুঝতে অসুবিধে হয় না। তা হবে x^7, x^6a, x^5a^2, x^4a^3, x^3a^4, x^2a^5, xa^6, a^7।

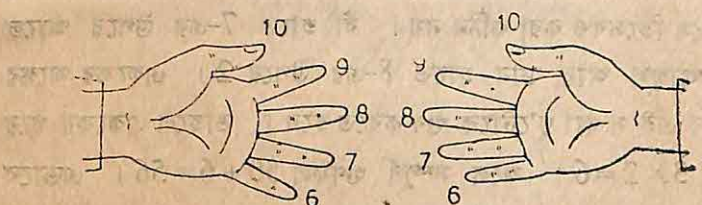
এবার সহগগুলি জুড়ে $(x+a)^7$-এর মান পাবো

$$(x+a)^7 = 1.x^7 + 7x^6a + 21x^5a^2 + 35x^4a^3$$
$$+ 35x^3a^4 + 21x^2a^5 + 7xa^6 + 1.a^7.1$$

এইভাবে ত্রিভুজের সংখ্যার সারি বাড়িয়ে ত্রিভুজকে আরও দীর্ঘ করে $(x+a)^8$, $(x+a)^9$ বা $(x+a)^{10}$-এর মানও বের করা যেতে পারে।

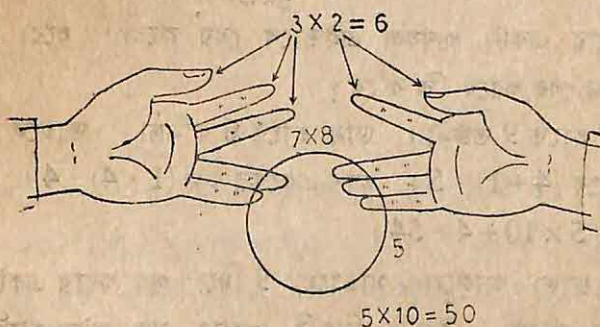
৮ আঙুলের সাহায্যে গুণ করবে কি ক'রে ?

আঙুলের সাহায্য নিয়ে গুণ করতে পারো ?

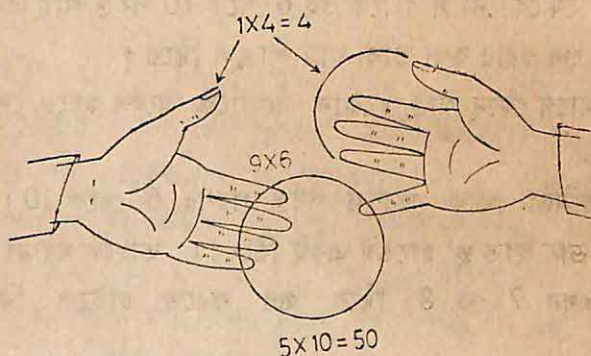
যোগ হলে নিশ্চয়ই সবাই পারতে। ছোটবেলায় আঙুল গুণে গুণেই যোগ করতে শিখি আমরা। কিন্তু গুণ ? 6 থেকে 10

পর্যন্ত যে কোনো সংখ্যাকে ওই 6 থেকে 10 পর্যন্ত আর একটা সংখ্যা দিয়ে গুণ করার কথা ভাবা যায় আঙুল দিয়ে ?

আগে কোন্ আঙুল কোন্ সংখ্যাকে নির্দেশ করছে, দেখে নেওয়া যাক।

কনিষ্ঠা থেকে বৃদ্ধাঙ্গুষ্ঠ পর্যন্ত পরপর 6 থেকে 10। বাঁ হাত আর ডান হাত দু' হাতেই একই হিসেব। তাহলে মধ্যমা 8।

এখন 7 কে 8 দিয়ে গুণ করতে চাইলে কি করবে ?

বাঁ হাতের 7-এর আঙুলকে ডান হাতের 8-এর আঙুলের সঙ্গে

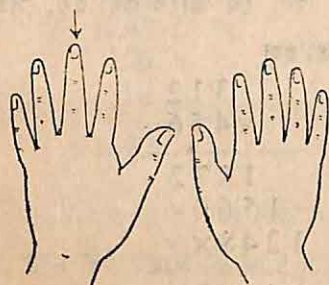
লাগাও। এবারে 7 আর 8-এর নিচে কটা আঙুল আছে হিসেব করো। 7-এর নিচে শুধু 6-এর আঙুল অর্থাৎ 1 আর 8-এর নিচে 6 আর 7, তাহলে 2। কিন্তু 7 আর 8-এর আঙুলকে বাদ দিলে চলবে না। তাদেরও নিয়ে আসতে হবে হিসেবের মধ্যে। অর্থাৎ 7-এর দিকে 2 আর 8-এর দিকে 3। সবশুদ্ধ 5। এই 5 হচ্ছে দশকের ঘরের অঙ্ক অর্থাৎ তার মান $5 \times 10 = 50$।

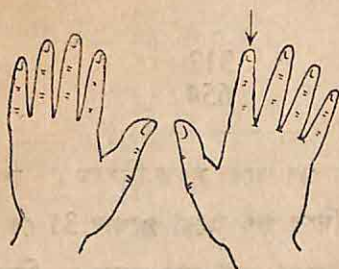
দশকের অঙ্কের পরে এবার এককের অঙ্কের হিসেব করতে হবে। কিন্তু সে হিসেবও করা কঠিন নয়। বাঁ হাতে 7-এর উপরে আছে 3টি আঙ্গুল আর ডান হাতে 8-এর উপরে 2। এককের অঙ্কের বেলায় এই সংখ্যা দু'টোকে গুণ করতে হবে। তাহলে এককের ঘরে বসবে $3 \times 2 = 6$। ফলে সম্পূর্ণ গুণফল $50 + 6 = 56$। এভাবে গুণফল বের করার সময়ে উত্তর কখনো ভুল হবে না।

আর একটা গুণফল এইভাবে বের করো। ধরো 9×6। এর মান বের করবে কি ক'রে?

বাঁ হাতে 9 তর্জনী। ডান হাতে 6 কনিষ্ঠা। তাহলে দশকের অঙ্ক হবে $(4+1) = 5$। আর এককের অঙ্ক $(1 \times 4) = 4$। তাহলে গুণফল $5 \times 10 + 4 = 54$।

এ ছাড়া আঙ্গুলের সাহায্যে 9 দিয়ে গুণ করার একটা সুন্দর কৌশল আছে। ইকড়ি মিকরি খেলার মত ক'রে দু'টো হাত পাশাপাশি রাখো টেবিলের ওপরে। পর পর 10টি আঙ্গুল

ছড়ানো। বাঁ হাতের কড়ে আঙ্গুলে 1 দিয়ে শুরু, ডান হাতের কড়ে আঙ্গুলে শেষ 10-এ।

এখন মনে করো, তুমি 9 কে 3 দিয়ে গুণ করবে। তাহলে বাঁ হাতের কড়ে আঙ্গুল থেকে 3 সংখ্যক আঙ্গুলটা তুমি একটু তুলে

$3 \times 9 = 27$

রাখবে। 3-এর বাঁ দিকে আছে 2টি আঙ্গুল। এই 2 হল দশকের অঙ্ক। আর ডাইনে 7। 7 এককের অঙ্ক। তাহলে 9 কে 3 দিয়ে গুণ করলে ফল হচ্ছে 27।

$7 \times 9 = 63$

আর যদি 9 কে 7 দিয়ে গুণ করতে, তাহলে কি হত? বাঁ দিক থেকে শুরু করলে 7 সংখ্যক আঙ্গুল হবে ডান হাতের তর্জনী। তার বাঁ দিকে 6টি আঙ্গুল অর্থাৎ 6 দশকের অঙ্ক আর ডাইনে 3। এই 3 হবে এককের অঙ্ক। তাহলে 9 কে 7 দিয়ে গুণ করলে গুণফল 63।

৯ দশমিকের গুণ করার নতুন কৌশল

দশমিকের বড় বড় গুণ সহজে করার একটা সুন্দর কায়দা আছে। ধরো, তোমাকে গুণ করতে বলা হল 3·12 কে 4·56 দিয়ে। সাধারণ দশমিকের গুণ যে ভাবে কষা হয়, সেইভাবে এগোলে যে মান পাওয়া যাবে, তা হল

```
     3·12
   × 4·56
  -------
     1872
    1560×
   1248××
  -------
  14·2272
```

কিন্তু এই গুণফল বের করা যায় অনেক সহজে নতুন এক কায়দায়। কী ভাবে?

নতুন কৌশলে গুণ করার সময়ে একটা সংখ্যাকে সোজা লেখো আর একটা সংখ্যাকে উলটে। অর্থাৎ যেন 312 কে গুণ করছো 654 দিয়ে।

```
  312
  654
  ---
```

প্রথমে 4 দিয়ে গুণ করো সহজ নিয়মে। তখন গুণফল 1248। এবারে গুণকের 5 দিয়ে গুণ করো গুণ্যের 31 কে। গুণ্যের এককের অঙ্ক 2 কে বাদ রেখো এই গুণ থেকে। কিন্তু 5 কে 2 দিয়ে গুণ করলে দশকের ঘরে যে অঙ্ক আসে, 31 কে 5 দিয়ে গুণ করে নেওয়ার সময়ে তা যোগ করে নিতে হবে। অর্থাৎ 31 কে 5 দিয়ে গুণ ক'রে ফল হবে $155 + 1 = 156$।

এবারে আসতে হবে শতকের অঙ্কের হিসেবে। এখানে 3-কে 6 দিয়ে গুণ করবে। মান 18 কিন্তু হাতে কি কিছু রইবে? না, গুণ্যের এককের আর দশকের অঙ্ক যথাক্রমে 2 আর 1। গুণ

করবার সময়ে শতকের ঘরে সেইজন্য আর কিছু আসবে না। তাহলে 3 কে 6 দিয়ে গুণ করার ফল 18ই থাকবে।

তাহলে গুণের সমস্ত চেহারাটা কি রকম হবে ?

```
 312
 654
────
1248
 156
  18
────
1422
```

অর্থাৎ শুধুমাত্র দশমিকের স্থান নির্ণয় করতে পারলেই হল।

কিন্তু দশমিকের স্থান ঠিক করবে কি করে ?

312 কে 654 দিয়ে গুণ করার বেলায় 4 দিয়ে গুণ করার পরে যখন 312 কে 5 দিয়ে গুণ করছো, তখন গুণটা আসলে করছো 31·2 কে 5 দিয়ে অর্থাৎ গুণফল যেন 156·0। আবার 6 দিয়ে গুণ করার সময়ে দশমিকের পরের অঙ্কগুলি বাদ দিলে গুণটা যেন আসলে হয়ে যাচ্ছে 3·12 এর সঙ্গে। তাহলে দশমিকের পরের অঙ্কগুলিকে × দিয়ে চিহ্নিত করলে 312 × 654 হবে।

```
  312
 ×654
 ────
 1248
  156·×
   18·××
 ───────
 1422·××
```

কিন্তু প্রকৃত গুণনে দশমিকের চিহ্ন বসবে ডানদিক থেকে 4 ঘর আগে। অর্থাৎ গুণফল 14·22।

কৌশলের এই সংক্ষিপ্ত গুণনে গুণফল 2 দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ভুল আছে।

এবার আর একটা গুণ নেওয়া যাক।

$$45{\cdot}3 \times {\cdot}3984$$

সাধারণ নিয়মে গুণফল = 18·04752

কৌশলে সহজ গুণ করতে গেলে গুণফল কি আসে দেখা যাক।

```
 3984
  354
------
15936
 1992·×
  119·××
---------
18047·××
```

মূল গুণে এককের দিক থেকে 5 অঙ্কের পরে দশমিকের চিহ্ন বসবে। তাহলে আসল গুণফল 18·047।

যদি ইচ্ছে করো, তাহলে ঘুরিয়ে গুণ ক'রেও দেখতে পারো।

```
 453
4892
------
1359
 407·×
  36·××
   1·×××
---------
1803·×××
```

তাহলে মূল গুণফল 18·03।

এইভাবে সাধারণ নিয়মে $38{\cdot}74 \times 49{\cdot}6 = 1921{\cdot}504$।

কৌশলের গুণে

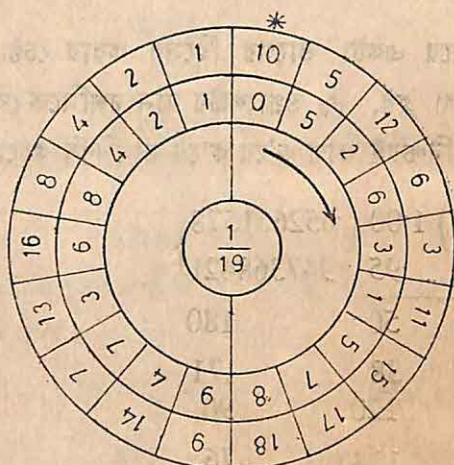
```
 3874
  694
------
154°6
 3486·×
  232·××
---------
19214·××
```

মূল গুণনে একক থেকে 3 দশমিক স্থানের পরে দশমিক চিহ্ন বসবে অর্থাৎ গুণফল হবে 1921·4।

১০ ভগ্নাংশের ভাগের অভিনব উপায়

গুণের পরে একটা ভাগের হিসেব করার চেষ্টা করো। যদি তোমাকে বলা হয়, $\frac{1}{19}$ ভগ্নাংশটির মান দশমিকে বের করতে হবে, তাহলে তুমি নিশ্চয়ই ভাগ ক'রে ক'রে তা নির্ণয় করতে পারবে।

```
19) 1·00 ( ·0̇52631578 }
     95     947368421̇  }
    ----
     50          180
     38          171
    ----        ----
    120           90
    114           76
    ----        ----
     60          140
     57          133
    ----        ----
     30           70
     19           57
    ----        ----
    110          130
     95          114
    ----        ----
    150          160
    133          152
    ----        ----
    170           80
    152           76
    ----        ----
     18           40
                  38
                ----
                  20
                  19
                ----
                   1
```

বৃত্তাকার মজার ছকটা দেখো। এতে প্রত্যেক ধাপের ভাগফল আর ভাগশেষ দেওয়া আছে। বৃত্তের বাইরের দিকটা ভাগশেষ আর ভেতরে ভাগফলের ঘর। কিন্তু ভাগফল বা ভাগশেষ শুরু হবে

কোথা থেকে ? বাইরে বা ভেতরে ঘরের সংখ্যা 18। যেখানে শুরু হবে সেখানে একটা তারকা চিহ্ন দেওয়া আছে। তীর চিহ্নিত দিক ধরে এগোতে এগোতে তুমি একেবারে শেষ ঘরে এসে পৌঁছে যাবে।

এই ধরনের ভাগে দুটো নজরে আসার মত দিক আছে।

1 : ভাগফলের বেলায় কোণাকুণি উলটো দিকের ঘরের সংখ্যার যোগফল 9।

2 : ভাগশেষের বেলায় কোণাকুণি উলটো দিকের ঘরের সংখ্যার যোগফল 19।

এই বৃত্তাকার মজার ছকটা থেকে তুমি যে শুধু $\frac{1}{19}$ এর মান পাচ্ছো তা নয়, এর সাহায্যে তুমি $\frac{1}{19}$, $\frac{2}{19}$, $\frac{3}{19}$ থেকে… $\frac{18}{19}$ পর্যন্ত যে কোনো মান পেয়ে যাচ্ছো, আর কোনো হিসেব নিকেশ না করেই।

ধরো, তুমি $\frac{4}{19}$-এর মান পেতে চাও, কী ভাবে তা জানতে পারবে ?

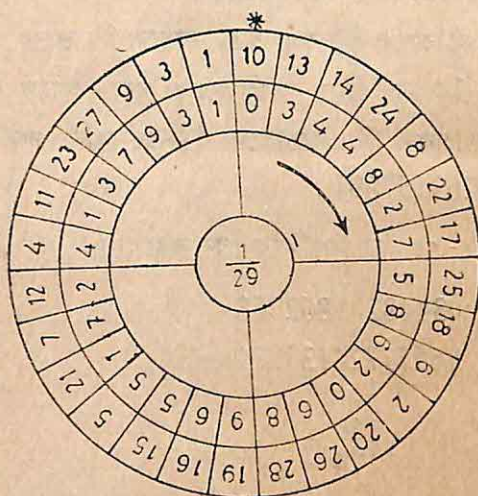
প্রথমে ভাগশেষের ঘরে 3 কোথায় আছে খুঁজে বের করো। ভাগশেষ 3-এর নিচের ঘরের ভাগফল কত ? তাও 3। ভাগফলের 3-এর পরের ঘরে আছে 1। ভাগফল শুরু হবে এই 1 থেকে। অর্থাৎ ভাগফল $\cdot 15789473684210526\dot{3}$।

যদি $\frac{3}{19}$-এর বদলে $\frac{14}{19}$ বলা হত, তাহলে কি ভাবে এগোতে ?

ভাগশেষ 14-এর নিচে ভাগফলের ঘরে আছে 4। 4-এর পরের ঘরে ভাগফল 7। তাহলে $\frac{14}{19}$-এর মান দশমিকে পাবে $\cdot\dot{7}3684210526315789\dot{4}$।

এইবার $\frac{1}{29}$-এর মান দশমিকে বের করবো।

```
29) 1·00 (·0̇3448275862068
     87    965517241379 3 1̇
   ----
    130       180
    116       174
   ----      ----
    140        60       150
    116        58       145
   ----      ----      ----
    240       200        50       110
    232       174        29        87
   ----      ----      ----      ----
     80       260       210       230
     58       232       203       203
   ----      ----      ----      ----
    220       280        70       270
    203       261        58       261
   ----      ----      ----      ----
    170       190       120        90
    145       174       116        87
   ----      ----      ----      ----
    250       160        40        30
    232       145        29        29
   ----      ----      ----      ----
    180       150       110         1
```

$\frac{1}{19}$-এর মত $\frac{1}{29}$-এরও একটা বৃত্তাকার ছক তৈরি করা যায় যার বাইরের দিকে ভাগশেষ আর ভেতরে রয়েছে প্রত্যেক ধাপের ভাগফল।

দশমিকের এই ভাগেও কিন্তু আগের মত দু'টো নজরে আসার দিক রইল। ভাগফলের ঘরে এখানেও কোণাকুণি উলটো দিকের ঘরের যোগফল 9 আর ভাগশেষের বেলায় 29। তা ছাড়া $\frac{2}{29}$, $\frac{3}{29}$,…এ রকমভাবে $\frac{28}{29}$ পর্যন্ত ভগ্নাংশের মানও তুমি দশমিকে স্বচ্ছন্দে বের করতে পারো।

$\frac{13}{29}$-এর মান কত হবে?

ভাগশেষ 13-এর নিচে ভাগফলের ঘরে রয়েছে 3। তার পরের ঘরে 4। তাহলে ভাগফল ·448275862068965517241379310$\frac{3}{29}$।

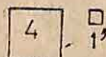
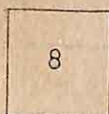
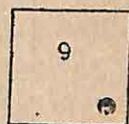
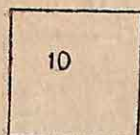
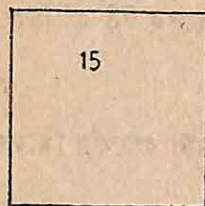
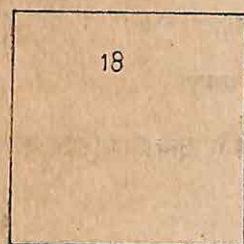
১১ সুষম ক্ষেত্রকে বিভিন্ন ক্ষেত্রে ভাগ করবে কেমন করে ?

●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

আয়তক্ষেত্র

ধরো একটা আয়তক্ষেত্র আছে তোমার কাছে যার ক্ষেত্রফল 78-বর্গ একক। সেমি এককে তুমি নিতে পারো কিম্বা রেখচিত্রে তোমার ইচ্ছেমতো এককে।

এই আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য-প্রস্থ কেমন হবে ?

$$78 = 13 \times 6$$
$$= 26 \times 3$$
$$= 39 \times 2$$
$$= 78 \times 1$$

তাহলে আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য হতে পারে 13, 26, 39 বা 78-এককের।

এই রকম একটা মাপের আয়তক্ষেত্রকে কেটে তুমি চারটে বর্গক্ষেত্রে ভাগ করতে পারো ?

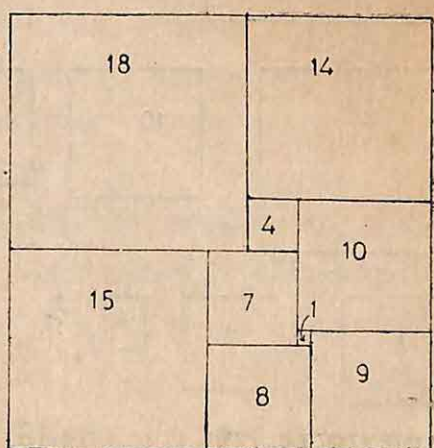
এই প্রশ্নটা করার কারণ আছে।

$78 = 8^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 (= 64 + 9 + 4 + 1)$ বলে 78-কে নিশ্চয়ই এমন চারটে বর্গে ভাগ করা সম্ভব, যে সব বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য হবে 8, 3, 2, 1।

চেষ্টা ক'রে দেখো একবার। কী হলো ? পেরে উঠলে না তো! তাহলে আর এক কাজ করো।

আগে একই এককের হিসেবে চারটে বর্গক্ষেত্র নাও, যার একটা দৈর্ঘ্যে 8, বাকি তিনটে হবে 3, 2, 1। এবার এই চারটেকে মিলিয়ে দেখো 78-বর্গ এককের একটা আয়তক্ষেত্র হয় কি না। না, এবারেও হবে না। চারটে ছোট বর্গক্ষেত্রকে কাটাকাটি না করলে কিছুতেই 78-বর্গ এককের আয়তক্ষেত্রটা পাওয়া যাবে না।

বর্গক্ষেত্র

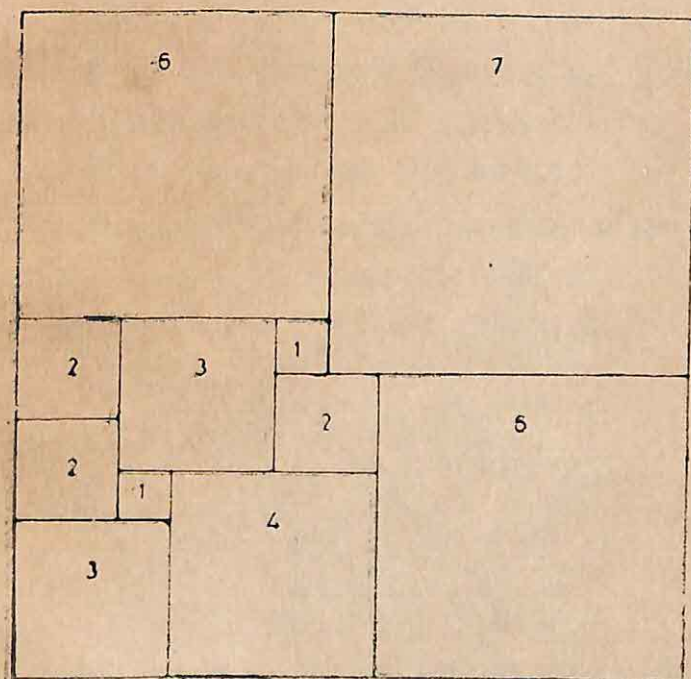
তবে নটা বর্গক্ষেত্র মিলিয়ে একটা সুন্দর আয়তক্ষেত্র তৈরি করা চলে।

এখানে নটা বর্গক্ষেত্র দেওয়া আছে। এই নটা বর্গক্ষেত্রের

বাহুর দৈর্ঘ্য 18, 15, 14, 10, 9, 8, 7, 4, 1। পারবে, এই বর্গ-ক্ষেত্রগুলো মিলিয়ে একটা আয়তক্ষেত্র তৈরি করতে? মনে রেখো, কোথাও অসম্পূর্ণ থাকলে চলবে না।

দেখে নাও, কিভাবে নটা বর্গক্ষেত্র মিলিয়ে একটা আয়তক্ষেত্র তৈরি করা হয়েছে। সংখ্যার হিসেবেও সমস্তটা মিলে যায়।

$$33 \times 32 = 18^2 + 15^2 + 14^2 + 10^2 + 9^2 + 8^2 + 7^2 + 4^2 + 1^2$$

এরপরে বর্গক্ষেত্র মিলে আয়তক্ষেত্র নয় আর একটা বর্গক্ষেত্রই তৈরি করতে হবে।

এগারোটা বর্গক্ষেত্র নাও। এর এক একটা বাহুর দৈর্ঘ্য হবে

7, 6, 6, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1। অর্থাৎ 7 বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র হবে একটা, 6 বাহুর দু'টো, 4-এর 1, 3 আর 1-এর 2

ক'রে আর 2-এ তিনটে। সবগুলো বর্গক্ষেত্র মিলে যে বড় বর্গক্ষেত্রটা পাওয়া যাবে তার প্রত্যেকটা বাহুর দৈর্ঘ্য হবে 13।

অর্থাৎ

$$1.7^2 + 2.6^2 + 1.4^2 + 2.3^2 + 3.2^2 + 2.1^2 = 13^2$$

ছবি দেখলেই বুঝতে পারবে, কেমন করে এই বর্গক্ষেত্রটা তৈরি করা যায়।

এইভাবে ভিন্ন ভিন্ন বর্গক্ষেত্র জুড়ে তোমরা বড় আকারের বর্গক্ষেত্র বা আয়তক্ষেত্র তৈরির চেষ্টা ক'রে দেখতে পারো।

১২ সমকোণী ত্রিভুজের সাহায্যে বিভিন্ন সংখ্যার বর্গমূল বের করবে কি ভাবে ?

যে কোনো ত্রিভুজের তিনটে বাহুর দৈর্ঘ্য 3, 4, 5 নিয়ে আমরা দেখেছি, ত্রিভুজটা একটা সমকোণী ত্রিভুজ। 5, 12, 13 বা 6, 8, 10 নিলেও তাই। পিথাগোরাসের কথা উল্লেখ ক'রে শুরুতে এ নিয়ে আলোচনা আছে। অতিভুজের উপরে বর্গ, অন্য দু'টি বাহুর উপরে বর্গের যোগফলের সমান। অর্থাৎ

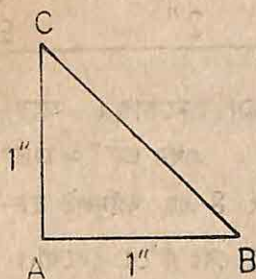
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

বা $5^2 + 12^2 = 13^2$

বা $6^2 + 8^2 = 10^2$

কিন্তু এমন যদি একটা সমকোণী ত্রিভুজ নেওয়া যায়, যে ত্রিভুজের সমকোণ তৈরি করে এমন বাহু দু'টির প্রত্যেকটি সমান, আর দৈর্ঘ্য যদি 1-ইঞ্চি হয়, তাহলে অতিভুজ দৈর্ঘ্যে কত হবে ?

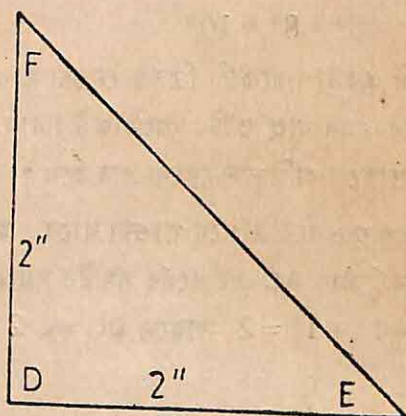
পিথাগোরাসের সূত্র ধরে এগিয়ে পাওয়া যাবে, অতিভুজ BC-এর বর্গ, AB-এর বর্গ আর AC-এর বর্গের সমষ্টির সমান।

অর্থাৎ $BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ তাহলে $BC = \sqrt{2}$

বর্গমূল বের করলে BC-এর মান কত পাবে ? তা হবে 1·412।

ত্রিভুজে সমকোণ তৈরি করে এমন বাহু দুটির মান যদি 1-ইঞ্চি

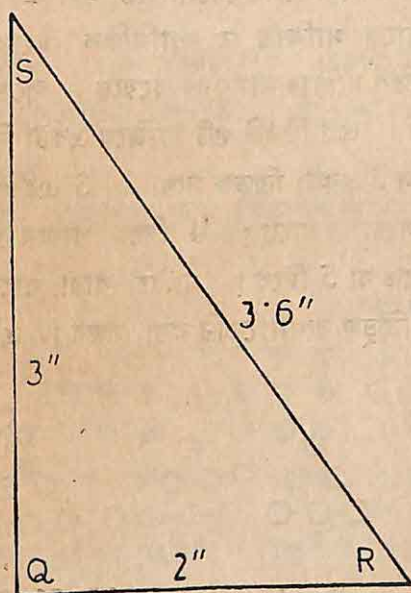
নাও, তাহলে অতিভুজের মান আসবে 1·4 ইঞ্চি। মেপে দেখলেই বুঝতে পারবে। আর সেন্টিমিটারে নিলে 1·4 সেমি। এইভাবে অনেক বর্গমূলের মানই প্রথম দশমিক স্থান পর্যন্ত প্রায় নির্ভুলভাবে বলে দেওয়া যায়।

$\sqrt{8}$-এর বর্গমূল কত হবে, এ রকমভাবে বলতে পারো ? এখন সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের সন্নিহিত দু'টো বাহুর দৈর্ঘ্য নাও 2-একক। এখানে একক হিসেবে ইঞ্চি নেওয়া ভাল। তাতে মান বের করার সময়ে ভুল হওয়ার আশঙ্কা কম থাকে।

তাহলে সমকোণের সন্নিহিত দুটি বাহুর মান 2 ইঞ্চির সমান ধরলে ত্রিভুজের চেহারা কেমন আসবে ?

DEE ত্রিভুজের EDF সমকোণ। আর DE = DF = 2 ইঞ্চি। EF ত্রিভুজের অতিভুজ। এখন $EF^2 = DE^2 + DF^2$, ফলে $EF = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ অর্থাৎ 8-এর বর্গমূলই EF-এর মান। গাণিতিক প্রক্রিয়ায় 8-এর বর্গমূল বের ক'রে দেখো। তা 2·83। স্কেলের সাহায্যে মেপেও EF-এর মান নির্ভুলভাবে পাবে 2·8 ইঞ্চি।

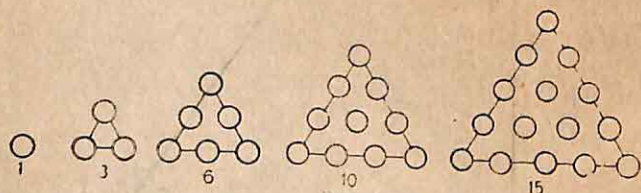
যে সব সংখ্যার পূর্ণ বর্গমূল বের করা যায়, তাদের তো কথাই ওঠে না, কিন্তু যে সব সংখ্যার পূর্ণ বর্গমূল বের করা যায় না, ছবি

এঁকে এমন সব সংখ্যারও বর্গমূল নিশ্চয়ই বের করতে পারছো। 2 আর 8-এর বর্গমূল বের করার সময়ে সন্নিহিত বাহু দুটির দৈর্ঘ্য সমান নিয়েছো। কিন্তু যে কোনো বর্গমূল বের করার সময়ে ওই বাহু দু'টির দৈর্ঘ্য যে সব সময়ে সমান নিতে হবে এমন কোনো কথা নেই। ধরো একটা বাহুর দৈর্ঘ্য নিলে 3 ইঞ্চি আর একটা 2-ইঞ্চি। তাহলে তুমি 13-এর বর্গমূল বের করতে পারবে আগের মতনই।

13-এর বর্গমূল কত। দশমিকে তা হবে 3·605।

QRS ত্রিভুজে স্কেলের সাহায্যে RS-এর মান মেপে দেখো। তা হবে 3·6 ইঞ্চি।

১৩ সংখ্যাকে কি রেখচিত্রে দেখানো যায় ?

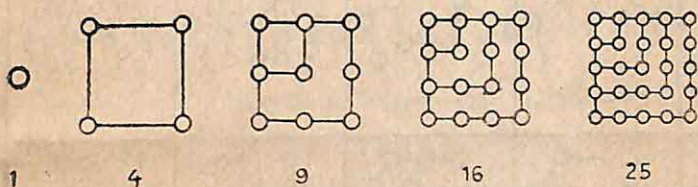
ত্রিভুজ সংখ্যা

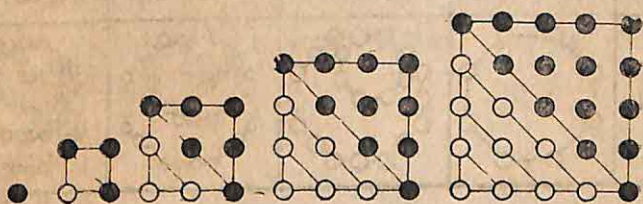
অনেক রকম সংখ্যার কথা সবাই জানো। যুগ্ম সংখ্যা, অযুগ্ম সংখ্যা, তা ছাড়া আছে মৌলিক সংখ্যা (যে সংখ্যাকে শুধু 1 আর সেই সংখ্যা দিয়ে ভাগ করলেই মেলে, অন্য কোনো সংখ্যা নয়)। তা ছাড়া সংখ্যাকে সাজিয়ে যে জ্যামিতিক চেহারা আসে, সেই চেহারার ভিত্তিতেও সংখ্যার নামকরণ হয়েছে। লুডোর গুটির মত তিনটে গুটি নাও। এই তিনটি গুটি সাজিয়ে একটা ত্রিভুজের চেহারা আসে। তাহলে 3 একটা ত্রিভুজ সংখ্যা। 3 এর পরে আর কি কোনো ত্রিভুজ সংখ্যা আছে? 4 দিয়ে পারবে কোনো ত্রিভুজ সংখ্যা তৈরি করতে বা 5 দিয়ে? না, তা পারা যাবে না। কিন্তু 6 দিয়ে আবার ত্রিভুজ সংখ্যা তৈরি করা সম্ভব। এইভাবে 6-এর

পরে ত্রিভুজ সংখ্যা পাবে 10, তারপরে 15, 21, 28, 36, 45···। তোমরা নিজেরাও আরও অনেক ত্রিভুজ সংখ্যা বের করতে পারো।

ত্রিভুজ সংখ্যা হিসেবে প্রথমে 3-এর কথা বলেছি। কিন্তু গণিতবিদেরা 3 দিয়ে ত্রিভুজ সংখ্যার শুরু করেন নি। প্রথম ত্রিভুজ সংখ্যা হিসেবে তাঁরা ধরে নিয়েছেন 1-কে।

এইসব ত্রিভুজ সংখ্যা পাওয়া যাবে কেমন ক'রে? প্রথম ত্রিভুজ সংখ্যা 1, দ্বিতীয় ত্রিভুজ সংখ্যা $1+2=$, পরেরটা $1+2+3=6$, তারপরে $1+2+3+4=10$, এইভাবে চললো।

বর্গ সংখ্যা

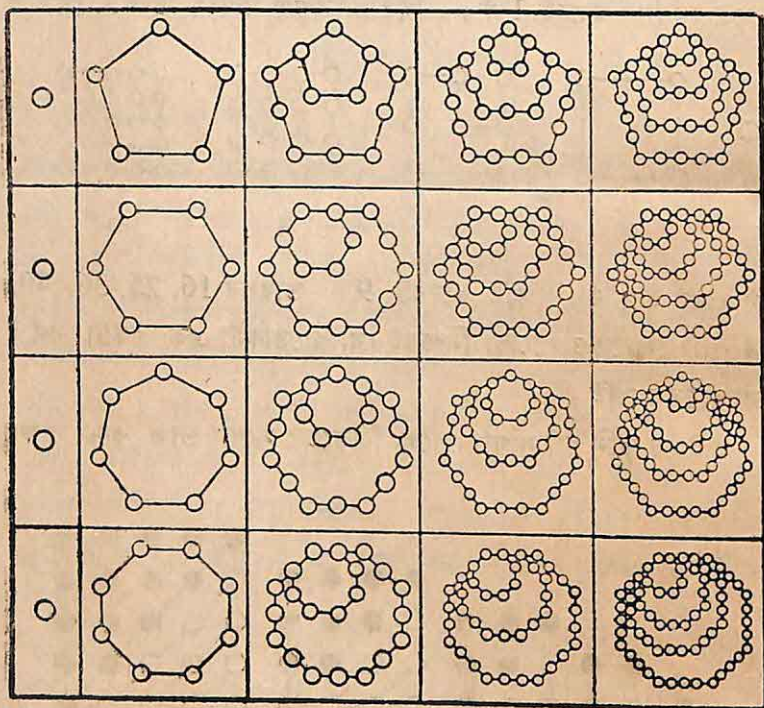
ত্রিভুজ সংখ্যার মত আছে বর্গ সংখ্যা। প্রথম বর্গ সংখ্যাটা ত্রিভুজ সংখ্যার মতনই 1-ই। দ্বিতীয় ত্রিভুজ সংখ্যা ছিল 3, দ্বিতীয়

বর্গ সংখ্যা হবে 4। তার পরেরটা 9। তারপর 16, 25, 36, 49, 64…। দেখতেও পাচ্ছো নিশ্চয়ই যে, প্রত্যেকটা এক একটা বর্গ। চেহারাতেও তাই।

এই যে তুমি বর্গ সংখ্যা পেলে, ত্রিভুজের সংখ্যা ভাল করে লক্ষ্য

করলে বুঝতে পারবে, পর পর দু'টো ত্রিভুজের সংখ্যা যোগ করলেই একটা বর্গ সংখ্যা চলে আসবে।

$1+3=4$, $3+6=9$, $6+10=16$, $10+15=25$। শুধু তাই নয়, ছবিতেও তাই।

অন্যান্য সংখ্যা

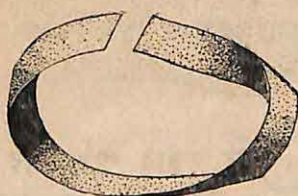
এইভাবে পাওয়া যায় পঞ্চভুজ সংখ্যা, ষড়ভুজ সংখ্যা, সপ্তভুজ সংখ্যা, অষ্টভুজ সংখ্যা। আর সেই সঙ্গে তাদের চিত্ররূপও। এইসব ক্ষেত্রেই প্রথম সংখ্যাটা কিন্তু 1।

ত্রিভুজ থেকে অষ্টভুজ পর্যন্ত পর্যন্ত এক এক ক'রে এদের বাহুসংখ্যা তুলে ধরি ঃ

বাহুসংখ্যা		১ম শ্রেণী	২য় শ্রেণী	৩য় শ্রেণী	৪র্থ শ্রেণী	৫ম শ্রেণী
ত্রিভুজ	3	1	3	6	10	15
বর্গক্ষেত্র	4	1	4	9	16	25
পঞ্চভুজ	5	1	5	12	22	35
ষড়ভুজ	6	1	6	15	28	45
সপ্তভুজ	7	1	7	18	34	55
অষ্টভুজ	8	1	8	21	40	65

এইভাবে তোমরা নিজেরাও হাতে কলমে আরও অনেক বহুভুজ তৈরি করতে পারো।

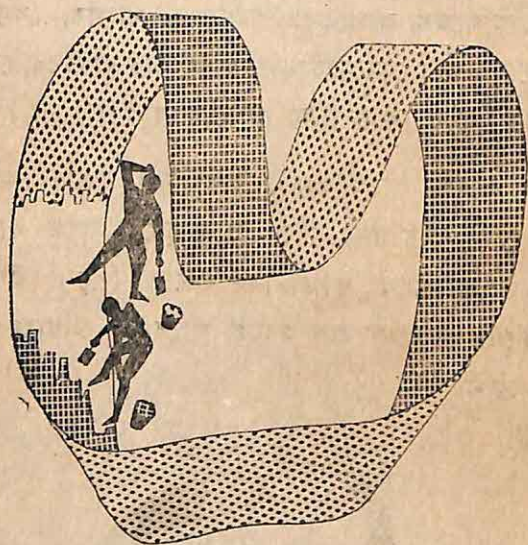
১৪ কাগজের ফালির কটা পিঠ ?

যে বইয়ের পাতাটা ধরে এখন তুমি পড়ে যাচ্ছো, তার দু'টো পিঠ। একটা সামনের পিঠ, আর একটা পিছনের। শুধু বইয়ের পাতা কেন, কাগজের, কাপড়ের, গেলাসের, থালার, বেলুনের—সব কিছুরই দু'টো পিঠ। কোনোটার ভেতরের আর বাইরের, কোনোটার উপরের আর নিচের, কোনোটার সামনের আর পিছনের।

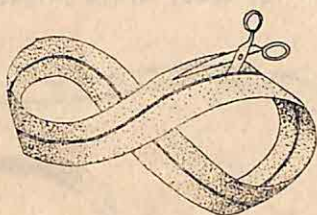
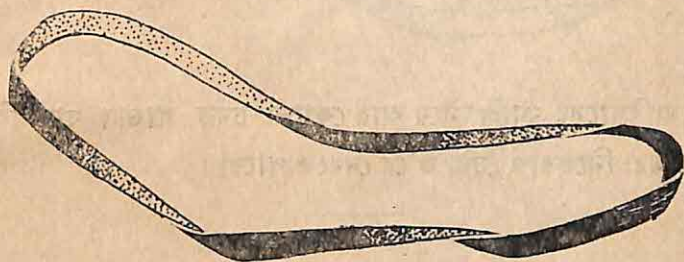
খবরের কাগজ থেকে একটা লম্বা সরু ফালি কেটে নাও। কোনো প্যাঁচ না পড়ে লক্ষ্য রেখে প্রান্ত দু'টো জুড়ে দাও। এই আংটার মত কাগজের ফালিটারও দু'টো পিঠ। ইচ্ছে করলে তুমি এর দু'টো আলাদা রংও করতে পারো। সেখানেও কোনো অসুবিধে হবে না।

কিন্তু যদি কোনো প্যাঁচ না দেওয়ার বদলে যদি আধ প্যাঁচ দিয়ে প্রান্ত দু'টি জুড়ে দাও, তাহলে কি হবে? আগে ছিল এর দু'টো পিঠ। এখন এর কটা পিঠ হবে ?

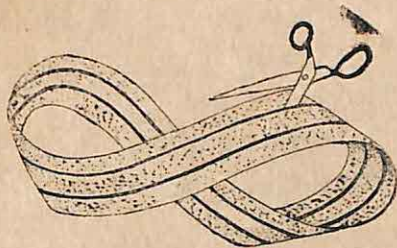
তোমার নিশ্চয় মনে হচ্ছে, আগের মত এখানেও দু'টো পিঠই থাকার কথা। কিন্তু তা নয়, এই আংটাতে আছে একটা মাত্র পিঠ।

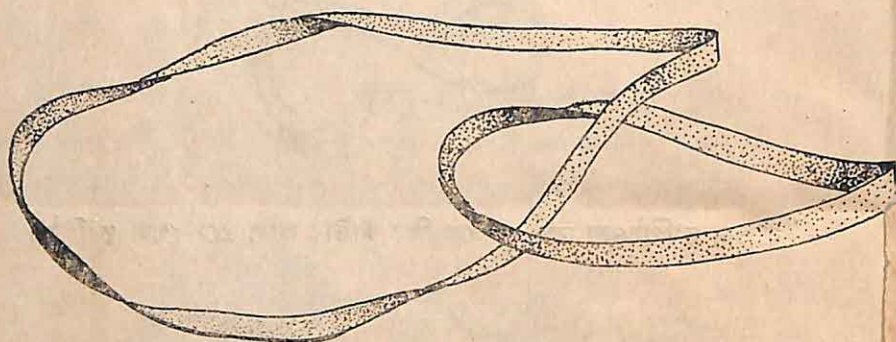
যদি আমার কথা বিশ্বাস না হয়, তাহলে দু'টো পিঠে একই সঙ্গে দু'জনে মিলে রঙ করা শুরু করো, দেখবে একসময়ে দু'টো রঙ এসে পৌঁছে যাচ্ছে মুখোমুখি। অদ্ভুত ব্যাপার নয় কি! পিঠ দুটো আলাদা হলে এরকম কিছুতেই হ'তে পারতো না।

তাহলে এইভাবে মোচড় দেওয়া কাগজের আংটার একটা মাত্র পিঠ। এই যে এক পিঠওয়ালা তল, এর কথা প্রথম বলেছিলেন জার্মান গণিতবিদ্ অগাসটাস ফার্ডিনাণ্ড মোবিয়াস (১৭৯০-

১৮৬৮ খ্রীস্টাব্দ)। তাঁর মৃত্যুর পরে তাঁর লেখা একটা প্রবন্ধ প্রকাশিত হয়। তাতে তিনি এই এক পিঠওয়ালা ফালির কথা বলেন। এ রকম ফালির কথা মুখে বললে বিশ্বাস করা কঠিন। কিন্তু এমন জিনিস তৈরি করা এত সহজ যে বলার নয়। এই ফালির নাম মোবিয়াসের ফালি।

এই ফালিকে যদি মাঝখান দিয়ে দু'ভাগে কাটতে থাকো, তাহলে শেষ পর্যন্ত কি হবে বল তো? মনে হবে, নিশ্চয়ই এটা

দু'ভাগ হয়ে যাবে। কিন্তু তা নয়। এখন এটা হবে একটা প্যাঁচ

খাওয়া দু'পিঠওলা তল। এক পিঠ কাটার ফলে এসে গেল দু'পিঠ।

এবারে তুমি যদি দু'পিঠে দু'রকম রঙ করতে চাও তো কোথাও কোনো অসুবিধে হবে না।

মোবিয়াসের ফালি থেকে আরও অনেক চমক নজরে আসে। ফালিটা যদি কিছুটা চওড়া হয়, তাহলে সেই চওড়া ফালিটা

তিনভাগে ভাগ করা যায়। এবারে এক ভাগের ভেতর দিয়ে কাঁচি চালাতে শুরু করো।

ভাবতে পারো শেষ পর্যন্ত কি হবে? এখন তুমি শিকলি বাঁধা দু'টো আংটা পাবো। এর একটা আবার মোবিয়াসের ফালি।

মোবিয়াসের ফালি নিয়ে আর কোনো চমক পাওয়া যায় কি না তোমরা নিজেরাও চেষ্টা ক'রে দেখতে পারো।